A chaque fois que vous rencontrerez un pictogramme , flashez le avec l'appli aurasma. Le cours sur la notion apparaîtra en réalité augmentée. Prenez soin de mettre vos écouteurs afin de ne pas perturber vos camarades.

Problématiques pédagogiques :

- Comment identifier un polynôme de degré 2 ?
- Comment résoudre des équations du type $x^2 = a$?
- Comment résoudre des inéquations du type $x^2 \geq a,\ x^2 \leq a$?
- Comment déterminer l'expression d'une fonction du second degré avec la symétrie ?
- Comment déterminer l'expression d'une fonction du second degré avec la forme canonique ?
- Comment déterminer les variations d'une fonction du second degré à l'aide de la forme canonique ?
- Comment résoudre une inéquation produit ?

Algorithmique :

- Forme canonique et Xcas : math'x 9p115
- Réalisation d'un algorithme donnant les nombres triangulaires : math'x 3p117

Histoire :

- Fibonacci, XIIème siècle

Fibonacci, XIIè

Très jeune, il accompagne son père en Algérie dans la colonie de *Bougie* (*Bujania*) pour être initié à l'arithmétique utile à un futur marchand. Mais son destin en voudra autrement et sera lié à celui de toutes les mathématiques occidentales à venir. A cette époque, l'Italie utilise encore les chiffres romains. Il découvre en Afrique de Nord, la numération de position et le calcul indo-arabe qu'il juge plus avancé. Ses voyages s'étendent par la suite sur toute la méditerranée, en Syrie, en Grèce, en Egypte... Il rencontre savants et scientifiques qui lui enseignent les savoirs du passé encore inconnus du monde occidental. Il y étudie les travaux d'Euclide d'Alexandrie (-320? ; -260?), de Héron d'Alexandrie (1er siècle de notre ère), de Mohammed al Khwarizmi (780 ; 850), …

A son retour en Italie, vers 1200, il se consacre pleinement aux mathématiques par l'écriture de plusieurs ouvrages. Le premier et le plus célèbre, le ***Liber abaci***, datant de 1202, nous transmet la numération de position indo-arabe. Il rassemble des méthodes de calcul des opérations élémentaires, des résultats d'algèbre sur les racines carrées et cubiques, sur certaines équations du 1er et 2e degré mais aussi des critères de divisibilité, la décomposition d'un nombre en produits de facteurs premiers, etc. On y trouve encore de nombreux problèmes comme celui exprimant la reproduction des lapins et menant à la suite dite de *Fibonacci* :

« Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin de l'année si, commençant avec un couple, chacun des couples produisait chaque mois un nouveau couple lequel deviendrait productif au second mois de son existence ? »

Sont notés en rouge, les couples productifs.

En janvier : 1 couple
En février : 1 couple
En mars : 1 + 1 = 2 couples
En avril : 1 + 2 = 3 couples
En mai : 2 + 3 = 5 couples
En juin : 3 + 5 = 8 couples
En juillet : 5 + 8 = 13 couples
En août : 8 + 13 = 21 couples

En septembre : 13 + 21 = 34 couples
En octobre : 21 + 34 = 55 couples
En novembre : 34 + 55 = 89 couples
En décembre : 55 + 89 = 144 coupleS

Les réponses constituent les nombres de la **suite de Fibonacci** : 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - ..., dont chaque terme à partir du 3ème est la somme des deux précédents.

En calculant les valeurs approchées des quotients de deux nombres successifs de la suite de *Fibonacci*, on trouve :
1/1= 1 ; 2/1= 2 ; 3/2 = 1,5 ; 5/3 = 1,666... ; 8/5 = 1,6 ; 13/8 = 1,625 ; 21/13 = 1,615... ; 34/21 = 1,619... ; 55/34 = 1,617... ; 89/55 = 1,618... (valeur approchée bien connue !!!) ...
En effet, en prenant le quotient de deux nombres successifs de plus en plus « éloignés » dans la suite de *Fibonacci*, on tend à se rapprocher du nombre d'or :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

= 1,618...

La suite de *Fibonacci* s'est rendue célèbre par ses représentations multiples en relation avec ce nombre mythique. On la trouve dans la fleur de tournesol, dans la formation de certains coquillages, sur l'ananas, le chou romain (ci-dessous) ou sur la pomme de pin qui présentent tous une spirale d'or. Un autre Léonard, *de Vinci*, la verra dans les proportions du corps humain avec l'homme de Vitruve.

A Pise, il rencontre l'empereur de l'Empire germanique *Frédéric II*, intellectuel passionné par les sciences et la philosophie, qui organise un tournoi de mathématiques où philosophes et savants s'affrontent pour résoudre des énigmes.
Fibonacci remporte le tournoi en résolvant 3 problèmes (voir ci-dessous). C'est d'ailleurs le seul car les autres compétiteurs n'ont pas même trouvé la solution d'un seul.

1er problème : Trouver un nombre rationnel tel que si on ajoute ou retranche 5 à son carré on obtienne aussi un carré.

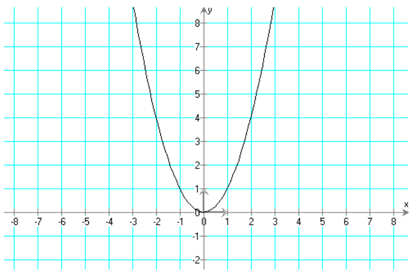
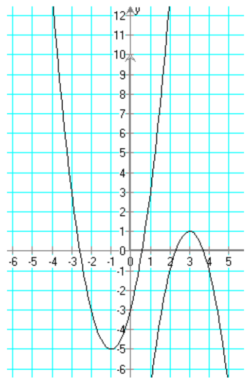
2e problème : Résoudre l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

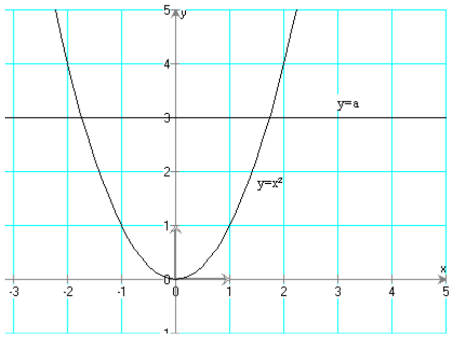
3e problème : Trois hommes ont mis en commun une somme d'argent. Leurs parts respectives sont de 1/2, 1/3 et 1/6. Chaque homme retire successivement une part de sorte qu'il ne reste plus rien de la somme initiale. Le premier homme remet au pot commun la moitié de ce qu'il a emprunté, le deuxième un tiers et le troisième un sixième. Lorsqu'à la fin les trois hommes se partagent équitablement le nouveau pot commun, chacun est en possession de son bien initial.

Quel était le montant du premier pot commun.

Fibonacci trouve 41/12 pour solution du 1er problème, 1,3688081075 pour le 2e et 47 pour le 3e. La même année, en 1225, *Fibonacci* écrit le ***Liber quadratorum*** qui présente la résolution de divers problèmes d'arithmétique. On y trouve aussi la notion de congruence, une liste de triplets pythagoriciens ainsi qu'une approximation au millième du nombre Pi : 864/275.

Carte d'identité des fonctions carrées et polynômes du second degré

Fonction	Carrée	Polynôme de degré 2
Equation	$f(x) = x^2$	$f(x) = ax^2 + bx + c$ Avec
Domaine de définition	$D =$	$D =$
Courbe représentative		
Eléments de symétrie de la courbe		Forme canonique : $a(x - x_0)^2 + y_0$ Sommet : (x_0, y_0)
Sens de variation de la fonction	• Si $a > 0$, • Si $a < 0$,	
Résoudre des équations	Les solutions de $x^2 = a$ sont : $\begin{cases} \sqrt{a}\ et - \sqrt{a}\ \ si\ a > 0 \\ 0\ si\ a = 0 \\ inexistantes\ si\ a < 0 \end{cases}$	
Résoudre des inéquations	$x^2 \geq a$ et $x^2 \leq a$ se résolvent graphiquement :	

	$S =$ 
Comparer des expressions	• Sur $]-\infty, 0[$, $a \leq b$ implique a^2 … … … b^2 • Sur $]0, +\infty[$, $a \leq b$ implique a^2 … … … b^2

Comment identifier un polynôme de degré 2 ?	AURASMA Identifier un polynôme de degré 2	Niveau de compétences

Développer les expressions suivantes puis cibler les fonctions qui sont des polynômes de degré 2.

$f(x) = -x^2 + 9 - 3x + 2x^2 + 4x - x^2$
$g(x) = (x-2)^2 + 4x - 2$
$h(x) = (-x+1)^2 - x^2 + 2$
$i(x) = 2(x-3)^2 + 1.$

Comment résoudre des équations du type $x^2 = a$?	AURASMA Résoudre $x^2 = a$	Niveau de compétences

Résoudre les équations suivantes :

$x^2 = 9$ $\qquad\qquad$ $-x^2 + 25 = 0$

$4x^2 - 16 = 0$

$\frac{9}{49}x^2 - 1 = 0$

$-x^2 = -50$

$-x^2 + 98 = 0$

$4x^2 - 32 = 0$

$\frac{27}{120}x^2 - 1 = 0$

Comment résoudre des inéquations du type $x^2 \leq a$ $x^2 \geq a$?	AURASMA Résoudre x^2 > a	Niveau de compétences

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$x^2 \geq 4$

$x^2 \leq 9$

$4x^2 \geq 4$

$16x^2 \leq 9$

$2x^2 - 14 \geq 4$

$-6x^2 \leq -36$

$-100x^2 \geq 25$

$4x^2 \leq \frac{9}{4}$

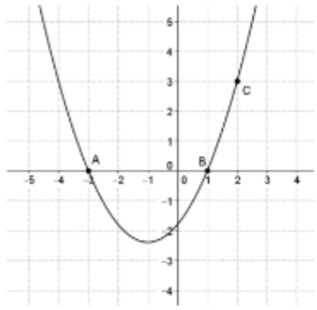
$2x^2 \geq -4$

$9x^2 \leq -9$

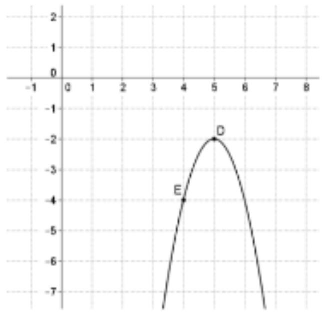
Comment déterminer l'expression d'une fonction du second degré à l'aide de la symétrie ?	AURASMA Second degré symétrie	Niveau de compétences

En utilisant les points à coordonnées entières situés sur les courbes, déterminer les équations des paraboles en utilisant la forme $\boldsymbol{a(x-u)^2+v}$

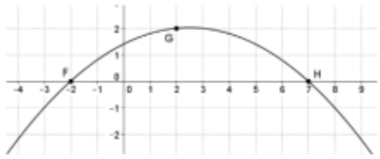
a)



b)

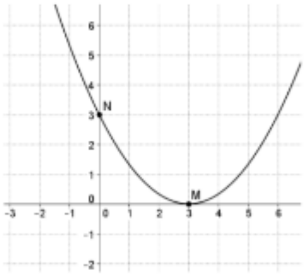


c)

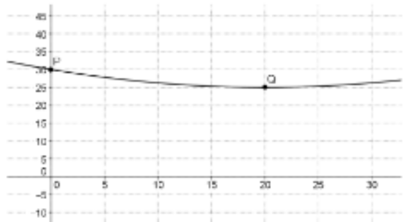


d)

e)



f)



Comment déterminer l'expression d'une fonction du second degré à l'aide de la forme canonique ?	AURASMA Second degré forme canonique	Niveau de compétences

1. En utilisant la calculatrice, localiser, en précisant ses coordonnées, l'extremum des fonctions polynômes suivantes :
   $f(x) = x^2 - 3x + 2$
   $g(x) = -x^2 - x$
   $h(x) = 2x^2 - x - 1$
   $i(x) = -x^2 - x - 1$

2. Donner la forme canonique des fonctions suivantes puis dans construire l'allure des différentes courbes dans un repère orthonormé, en y mentionnant l'extremum :
   $f(x) = x^2 - 2x + 4$
   $g(x) = x^2 - 4x + 1$
   $h(x) = -2x^2 - 4x + 2$

$$i(x) = -x^2 - 6x - 3$$

Comment déterminer les variations d'une fonction du second degré à l'aide de la forme canonique ?	AURASMA Second degré Variations	Niveau de compétences

1. Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes sans utiliser la calculatrice:
   $f(x) = -2(x-1)^2 + 2$
   $h(x) = 2(x-3)^2 + 1$
   $g(x) = x^2 - 4x - 5$
   $i(x) = 3x^2 - 18x - 2$

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ graphiquement dans chacun des cas.
3. En déduire le signe des différentes fonctions.

Comment résoudre une inéquation produit ?	AURASMA Inéquation produit	Niveau de compétences

Résoudre les inéquations suivantes :

$a)\ x^2 - 9 < 0$ $\quad b)\ (4x - 1)(-2x - 3) > 0$

$c)\ t - t^3 > 0$ $\quad d)\ -y(5 + y) \geq 0$

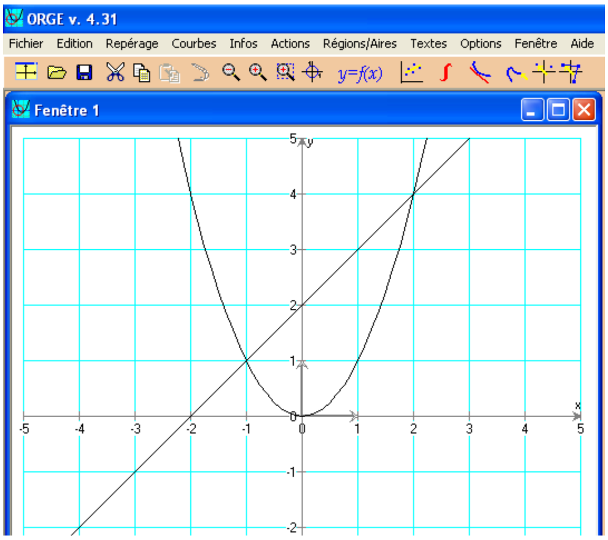
$e)\ y^2 + 1 \leq 0$ $\quad f)\ 3x^2 < 6x - 3$

$g)\ (a + 3)^2 \geq (2a - 5)^2$

$h)\ (y - 5)(2y - 14) > 4(3y - 21)$

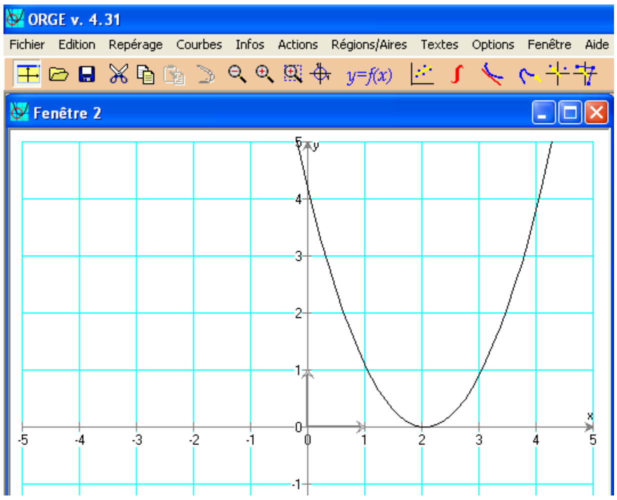
English corner

1. Using graphs to solve quadratic equations. Explain why the following graph gives the solution of the equation $x^2 - x - 2 = 0$.



2. Try again with the equation $x^2 - 3x + 1 = 0$.

3. Let the quadratic function $f(x) = x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$ be. The graph of f is given below.



   a. Using the graph
   Write down the table of variations of the function f.

   b. Draw on your calculator the graph of your function f on the domain $[1{,}9; 2{,}2]$. What do you notice about the variations of f ?