



A chaque fois que vous rencontrerez un pictogramme [AURASMA](#), flashez le avec l'appli aurasma. Le cours sur la notion apparaîtra en réalité augmentée. Prenez soin de mettre vos écouteurs afin de ne pas perturber vos camarades.

### *Problématiques pédagogiques :*

- Comment construire la somme de deux vecteurs ?
- Comment déterminer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  dans un repère ?
- Comment caractériser un parallélogramme à l'aide d'une égalité de vecteurs ?
- Comment mettre en évidence la colinéarité de deux vecteurs ?
- Comment montrer que trois points sont alignés ?
- Comment montrer que deux droites sont parallèles ?

### *Algorithmique :*

- Analyse d'un algorithme sous Xcas
- Algorithme décidant d'un alignement de 3 points

### *Histoire :*

- Simon Stevin XVIème siècle

## Simon Stevin, XVIème



Ingénieur, physicien, mathématicien et comptable, *Simon Stevin* est né en 1548 à Bruges. Il invente une méthode pour retenir une armée d'invasisseurs : il fait inonder les terres et chemins en ouvrant les écluses situées dans une digue.

Il participe également à la construction de fortifications, de ports, d'écluses, de moulins à vent ...

*Stevin* reprend les travaux d'[Archimède de Syracuse](#) (-287 ; -212) et écrit des ouvrages de mécanique et en particulier d'hydrostatique.

Dans « *De Beghinselen der Weeghconst* », publié en 1586 et avant *Galilée* (1564 ; 1642), il énonce le théorème du triangle des forces qui traite de l'équilibre d'un solide posé sur un plan incliné.

C'est d'ailleurs chez Stevin que nous rencontrons pour la première fois la notation  $\overline{AB}$  non pas encore pour désigner un vecteur mais une force.

En 1585, *Stevin* publie une petite brochure de trente-six pages intitulée « *La Theinde* ».

Le traité est surtout connu sous sa traduction française « **La Disme** ». Elle date de la même année et est due au mathématicien français *Albert Girard* (1595 ; 1632). C'est par cet écrit que *Stevin* marquera de son empreinte l'histoire des mathématiques. Son succès est considérable et se propage à travers toute l'Europe en une dizaine d'années. A cette époque, les nombres à virgule n'existent pas encore bien que la notion de décimale soit déjà connue par les arabes et les chinois (voir [Histoire des nombres](#)). En Europe, leur écriture se fait au moyen de [fractions](#). L'idée de *Stevin* est de privilégier les fractions décimales, liées à la [numération de position](#) indienne pour se rapprocher de la notation actuelle ...mais sans la virgule encore. L'avantage de cette écriture des nombres est d'éviter les calculs lourds de fractions pour se ramener aux règles opératoires d'arithmétique utilisées sur les entiers. Pour finir, illustrons sur un exemple la notation due à *Stevin* :

Le nombre 89,532 se note :

89①5①3②2③

① pour désigner aujourd'hui  $10^0$  (=1, l'unité)

② pour désigner  $10^{-2}$  (= 0,01, le centième)

① pour désigner  $10^{-1}$  (= 0,1, le dixième)

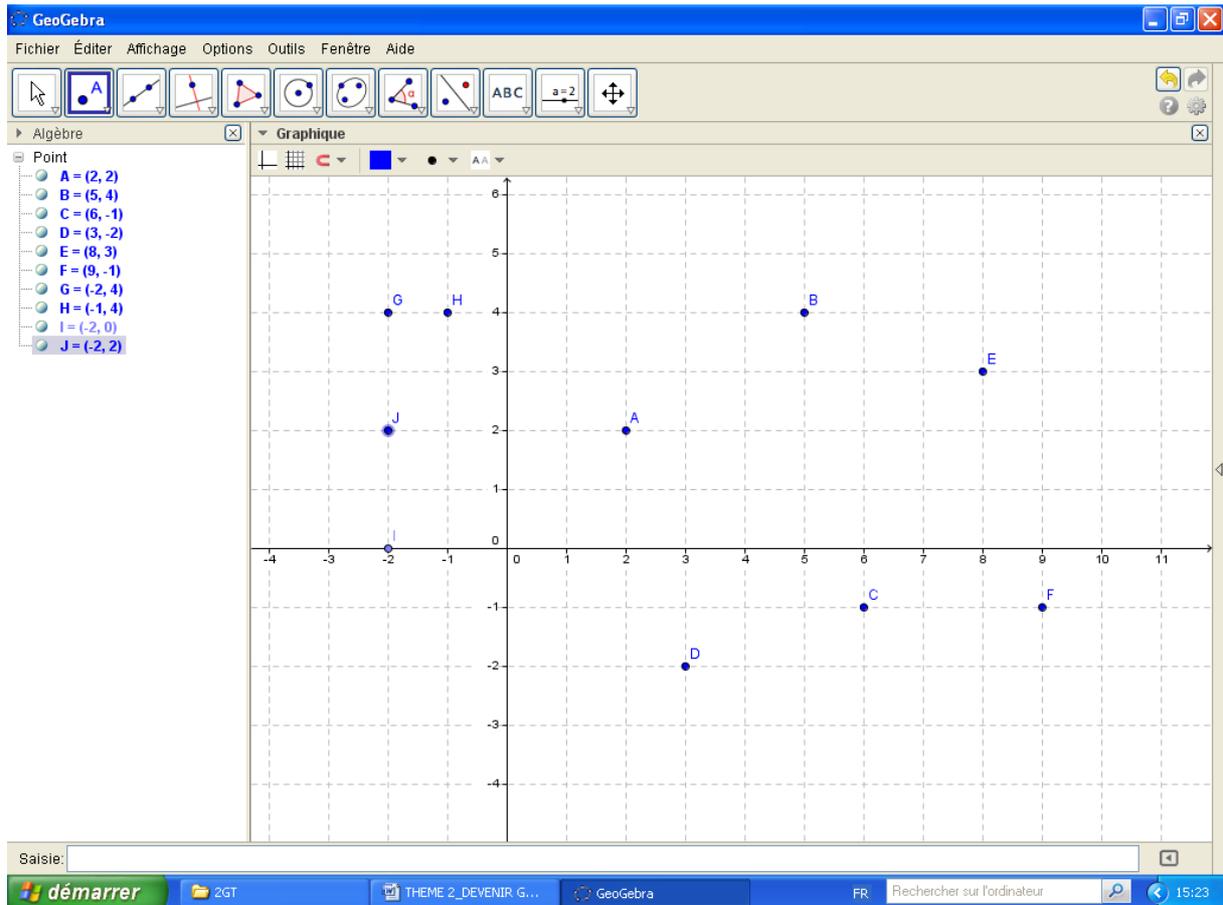
③ pour désigner  $10^{-3}$  (= 0,001, le millième)

Plus tard cette notation évoluera pour devenir 89o532, puis 89.532 et enfin 89,532. La virgule serait due à l'écosais *John Neper* (1550 ; 1617), l'inventeur des [logarithmes](#).

## Comment construire la somme de deux vecteurs ?



Niveau de compétences



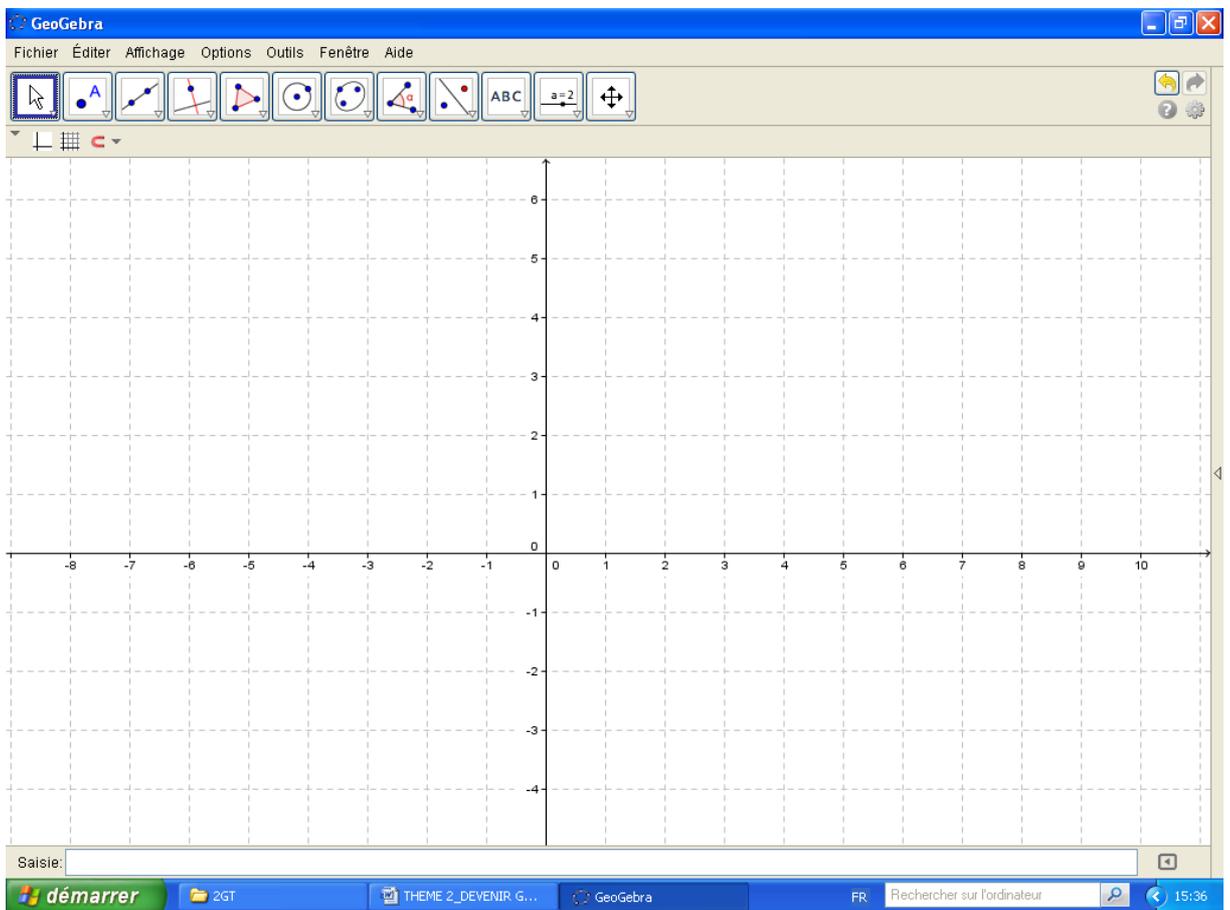
1. Construire les vecteurs unitaires  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , supports respectifs des axes des abscisses et des ordonnées.
2. Construire les vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{EF}$ ,  $\vec{GH}$ ,  $\vec{IJ}$ .
3. Donner les coordonnées de ces vecteurs dans le plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  en complétant le tableau ci-dessous :

Vecteurs	Coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$	Expression en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$
$\vec{AB}$	(3; 2)	$\vec{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$
$\vec{CD}$		

$\overrightarrow{EF}$		
$\overrightarrow{GH}$		
$\vec{Ij}$		
$\vec{i}$		
$\vec{j}$		

4. Réciproquement, construire dans le repère ci-dessous les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{AB}(5,1)$  et  $\overrightarrow{CD}(-3,4)$ .



5. Construire les vecteurs  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ ,  $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{r} = -3\overrightarrow{CD}$ .

<p><b>Comment déterminer les coordonnées d'un vecteur <math>\overrightarrow{AB}</math> dans un repère ?</b></p>	 <p>AURASMA Coordonnées d'un vecteur</p>	<p>Niveau de compétences</p>
---	--	------------------------------

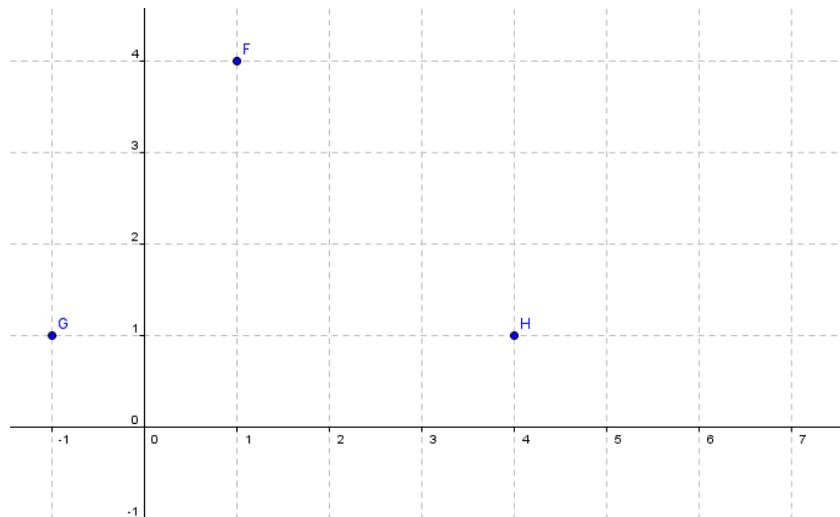
$A$	$B$	$\overrightarrow{AB}$
(5; 3)	(2; 6)	
(-1; 4)	(-3; 12)	
(0; 5)	(2; 0)	
(4; 17)	(-2; -2)	
(3; -3)	(0; -6)	
(10; -1)	(2; 5)	

**Comment caractériser le parallélogramme à l'aide d'une égalité de vecteurs ?**



Niveau de compétences

### Caractériser un parallélogramme



1. Construire le point I, tel que FIHG soit un parallélogramme.
2. Quelles égalités vectorielles peut-on extraire à partir de la configuration ?

Caractérisation vectorielle du parallélogramme :

3. Déterminer les coordonnées du milieu K du segment  $[FH]$ .

4. Montrer que K est aussi le milieu du segment  $[GI]$ .
5. En déduire une autre caractérisation du parallélogramme.

### Démontrer avec des égalités de vecteurs

ABCD et ABDE sont deux parallélogrammes.

1. Donner deux vecteurs égaux à  $\overrightarrow{AB}$ . En déduire que D est le milieu de  $[EC]$ .
2. Soit F le symétrique de B par rapport à D. Quelle est la nature de DFEA ?

ABCD, CDEF et EFGH sont trois parallélogrammes.

1. Citer deux vecteurs égaux à  $\overrightarrow{CD}$ .
2. Quelle est la nature de AHGB ?

Tracer un triangle RST et construire les points :

- a. E image de T par la translation de vecteur  $\overrightarrow{RS}$  ;
- b. F image de R par la translation de vecteur  $\overrightarrow{TS}$  ;
- c. Donner deux vecteurs égaux à  $\overrightarrow{TR}$ . Justifier.
- d. En déduire que S est le milieu de  $[EF]$ .

<p><b>Comment mettre en évidence la colinéarité de deux vecteurs ?</b></p>		<p>Niveau de compétences</p>
--	--	------------------------------

### A l'aide de la formule $\vec{u} = k\vec{v}$

$\vec{u}$	$\vec{v}$	Colinéaires	Non colinéaires
(2; 3)	(4; 6)		
(-1; 4)	(-3; 12)		
(1; 5)	(2; 6)		
(4; 7)	(-12; -21)		
(-2; -3)	(4; -6)		
(10; 25)	(2; 5)		

A l'aide de la formule  $xy' - yx' = 0$

$\vec{u}$	$\vec{v}$	Colinéaires	Non colinéaires
$(2; 21)$	$(\frac{4}{7}; 6)$		
$(-\frac{1}{3}; 4)$	$(-3; 36)$		
$(1; 3)$	$(\frac{8}{9}; \frac{23}{8})$		
$(\frac{3}{2}; 7)$	$(-12; -56)$		
$(-\frac{2}{5}; -\frac{3}{5})$	$(4; -6)$		
$(\frac{10}{3}; 25)$	$(2; 15)$		

<p><b>Comment montrer que trois points sont alignés ?</b></p>	 <p>AURASMA alignement de 3 points</p>	<p>Niveau de compétences</p>
---	---	------------------------------

Soit  $A(5, -2), B(8, 2), C(-1, -10)$ .

1. Calculer les coordonnées des vecteurs  $\vec{AC}$  et  $\vec{CB}$ .
2. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

Soit  $A(-2, 3), B(2, 1), C(4, 0)$ .

1. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

<p><b>Comment montrer que deux droites sont parallèles ?</b></p>	 <p>AURASMA Parallélisme</p>	<p>Niveau de compétences</p>
--	--	------------------------------

Soit  $A(-4, -3), B(8,1), C(4,4), D(-2,2)$ .

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{CD}$ .
2. Les points A, B, C sont-ils alignés ?
3. Démontrer alors que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles ?

Soit  $M(-2, -1), N(6,4), S(9,8), T(-4,0)$ .

1. Les droites  $(MN)$  et  $(ST)$  sont-elles parallèles ?

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On considère les points  $A(-5 ; 1), B(3 ; 6), C(-3 ; -2)$  et  $D(x ; 3)$  où  $x$  est un réel.

1. Placer les points A, B et C dans le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
Calculer, en fonction de  $x$ , les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$ .
2. En déduire la valeur de  $x$  pour que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  soient parallèles.  
On pourra utiliser la notion de colinéarité de vecteurs.  
Compléter la figure avec la valeur de  $x$  trouvée.
3. En utilisant la caractérisation vectorielle des parallélogrammes, montrer que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.
4. Déterminer les coordonnées du centre I du parallélogramme ABDC.
5. Déterminer la fonction affine  $f$  dont la représentation graphique est la droite  $(AB)$ .

### Problème de synthèse (1)

Le plan étant muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on donne :  $A(-1; 4), B(-4; -2)$  et  $C(1; 0)$ .

1. Calculer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
2. Calculer les coordonnées du point M intersection des diagonales du quadrilatère ABCD.
3. Soit  $E(6; 2)$ . Démontrez que B, C et E sont alignés.
4. Soit  $F(-7; 4)$ . Démontrez  $(BF)$  est parallèle à  $(AC)$  et que  $(AF)$  est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Soit G le point défini par  $3\overrightarrow{GE} + 4\overrightarrow{GF} = \vec{0}$ . Montrez que G, E et F sont alignés.
6. Calculez les coordonnées du point G.
7. Montrez que G appartient à la droite  $(AB)$ .

### Problème de synthèse (2)

Le plan étant muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on donne  $A(-1; 6), B(5; 9), C(5; -6)$  et  $D(1; 2)$ .

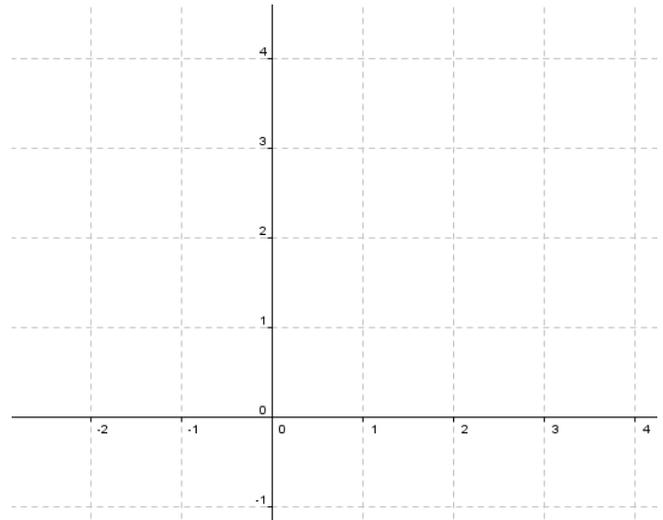
1. Faire une figure.
2. Démontrez que le triangle ABC est rectangle.
3. Démontrez que les vecteurs  $\overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{CA}$  sont colinéaires en précisant la valeur du coefficient de colinéarité  $k$  tel que  $\overrightarrow{CD} = k \times \overrightarrow{CA}$ .

4. La parallèle à (AB) passant par D coupe (BC) en E. Déterminez les coordonnées de E.
5. F est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Démontrez que A, E, F, D sont situés sur un même cercle. Précisez son centre et calculez son rayon.

### Le triangle et la droite d'Euler

Soit un triangle ABC défini par les points A, B et C de coordonnées respectives  $A(-2 ; 1), B(0 ; 4), C(2 ; 2)$ .

1. Construire le triangle dans le repère ci-contre.  
 Construire le centre de gravité G du triangle.  
 Complétez les relations vectorielles à l'aide des propriétés du centre de gravité :  
 on note A' le milieu de [BC]



$$\vec{AG} = \dots \times \vec{AA'}$$

$$\vec{AG} = 2 \times \dots$$

$$\vec{GA} + 2 \times \dots = \vec{0}$$

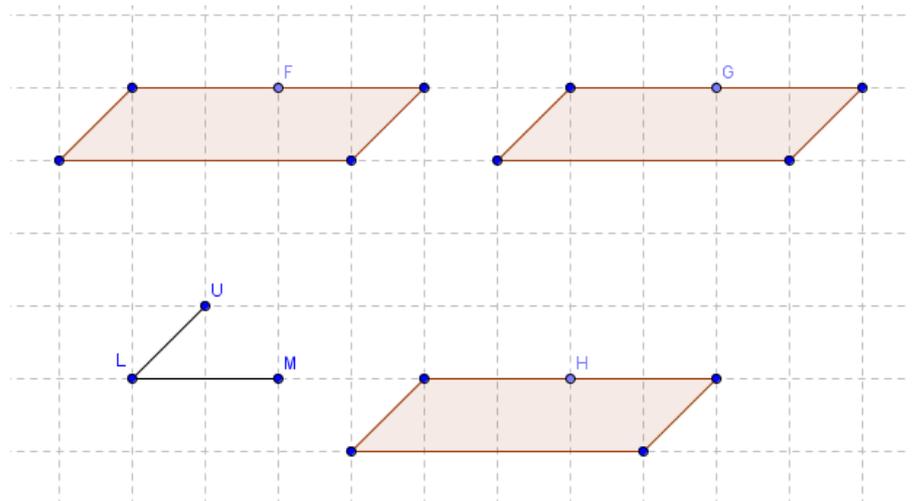
2. Construire le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.
3. Construire l'orthocentre du triangle ABC.
4. Qu'en déduisez-vous ?

English corner

Exercise 1

From the grid :

- Express the translation that maps shade F onto shade G in terms of vectors  $\overrightarrow{LM}$  and  $\overrightarrow{LU}$ .
- Express the translation that maps shade F onto shade H in terms of vectors  $\overrightarrow{LM}$  and  $\overrightarrow{LU}$ .



Exercise 2

In a video game, the screen is 100 units by 100 units. Each player has to enter a vector to give the direction the ball will travel. The ball starts at  $O(0;0)$ . Max enters the vector  $\vec{u}(10,20)$  and the ball moves, making an angle  $a^\circ$  with  $[OA]$ .

- What is the value of  $a^\circ$  ?
- Compute the coordinates of point K where the ball hit side  $[BC]$ .
- When the balls hits side  $[BC]$ , it rebounds so that the new path is defined by vector  $\vec{v}(20, -10)$ . Compute the coordinates of point L where the ball hit side  $[BA]$ .



Exercise 3

Let  $A(-2,4), B(-3,5), D(4,6)$  be. Find the coordinates of point C such that ABCD is a parallelogram.