FONCTIONS NUMERIQUES en Réalité Augmentée

HOUPERT N.

A chaque fois que vous rencontrerez un pictogramme AURASMA, flashez le avec l'appli aurasma. Le cours sur la notion apparaîtra en réalité augmentée. Prenez soin de mettre vos écouteurs afin de ne pas perturber vos camarades.

Problématiques pédagogiques :

- Comment déterminer l'image d'une abscisse par une fonction ?
- Comment déterminer l' (les) antécédents(s) d'une ordonnée par une fonction ?
- Comment savoir si un point du plan appartient à une courbe ?
- Comment construire un tableau de variations à partir d'une courbe ?

Algorithmique :

- Appréhender les instructions d'entrée et de sortie
- Initiation aux instructions conditionnelles

Histoire :

- Leonhard Euler, XVIIIème siècle

Leonhard Euler, XVIIIème

En théorie des nombres, *Euler* démontre la conjecture de Fermat dans le cas n=3, étudie les nombres parfaits (nombre égal à la somme de ses diviseurs propres) et entretient des correspondances avec *Christian Goldbach* (1690 ; 1764), célèbre aujourd'hui pour sa conjecture.

Dans *Introductio in analysin infinitorum* (1748), il pose les fondements de l'analyse mathématique et de la mécanique analytique. *Euler* établit la célèbre constante, notée γ (gamma), qui porte aujourd'hui son nom : γ = 0,57721566490153286060…
Sa nature est un problème ouvert, on ne sait pas s'il s'agit d'un nombre rationnel ou irrationnel.
Aujourd'hui près de 108 000 000 décimales de ce nombre sont connues. Le record est détenu par *Patrick Demichel* et *Xavier Gourdon* depuis 1999. La constante d'*Euler*, définit comme suit, demande quelques connaissances du lycée :

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$

Euler fonde ce qu'on appelle aujourd'hui l'**analyse fonctionnelle** en donnant une définition précise de la notion de fonction. Nous lui devons la notation *f(x)* pour désigner l'image d'un nombre *x* par une fonction *f*.
Mais ce n'est de loin pas la seule notation qu'il introduit dans le langage des mathématiques. Il utilise la lettre grecque Σ comme symbole de sommation. Par exemple, 1 + 2 + 3 + … + 1000 trop long à écrire se note : $\sum_{k=1}^{1000} k$

Il propose le célèbre π pour le nombre *Pi*, la lettre *i* pour la racine carrée de -1 et le fameux *e* base des logarithmes népériens.
Il établit à ce sujet, une formule liant ces trois nombres : $e^{i\pi} + 1 = 0$ et une seconde mettant en relation la trigonométrie et l'analyse complexe : $e^{ix} = \cos x + i.\sin x$.

Dans *Institutiones calculi intégralis* (1768/70), *Euler* développe également le calcul différentiel de Wilhelm Gottfried von Leibniz (1646 ; 1716) et la méthode des fluxions d'Isaac Newton (1642 ; 1727).
Il prolonge les travaux des *Bernoulli* et met en place la notion d'équation aux dérivées partielles et le calcul des variations par la recherche des extrema sur les courbes.

Découvrir le lien fonctionnel entre deux variables

1. Trouver le lien unissant les deux ensembles de nombres ci-dessous :

Ensemble 1		1	3	4	7	12	20
Ensemble 2		2	6	8	14	24	40

…

Les éléments de l'ensemble 1 sont appelés les …… et se notent ….

Les éléments de l'ensemble 2 sont appelés les …… et se notent ….

On peut alors écrire une relation entre y et x : ……..

On dit alors que x et y sont liés par une fonction notée f. On écrit alors $y = f(x)$.

Compléter alors :

$2 = f(\dots)$; $f(3) = \cdots$; $8 = f(\dots)$; $f(7) = \cdots$; $24 = f(\dots)$; $f(20) = \cdots$

Le tableau ci-dessus s'écrit plus simplement : $f(x) = \cdots \times x$

Conclusion : Une fonction est le …… qui unit deux ensembles de nombres.

Les éléments de l'ensemble de départ sont appelés les ……., tandis que les éléments de l'ensemble d'arrivée sont appelés les ……..

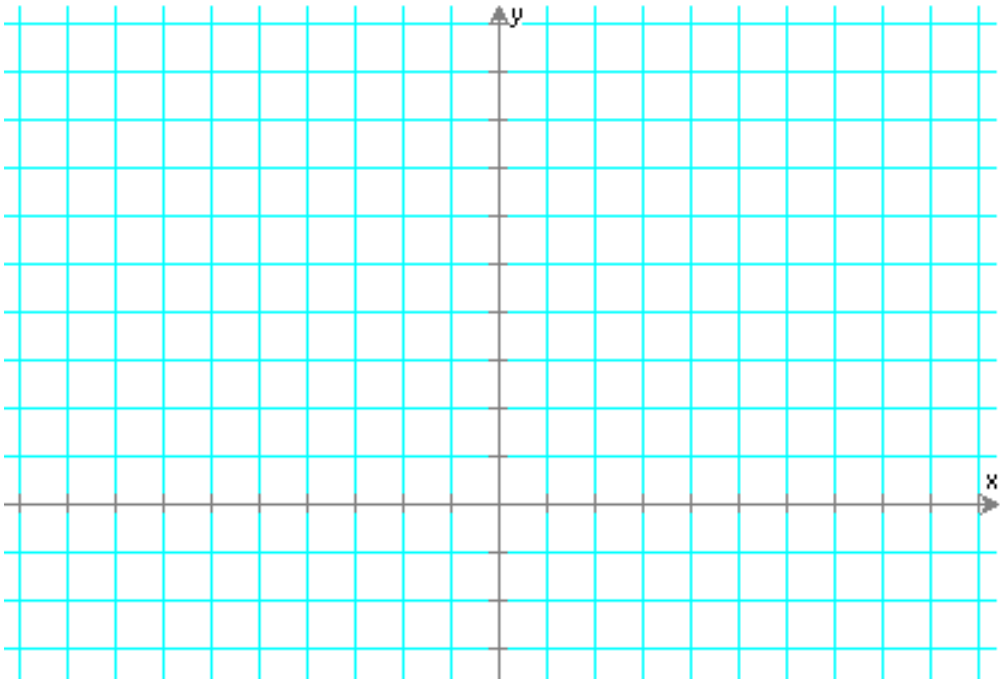
En utilisant cette même fonction, compléter le tableau ci-dessous :

x	$\frac{1}{2}$		-1,4	
$f(x)$		$\frac{1}{6}$		2π

2. Placer dans le repère ci-après, les différentes abscisses, lorsque cela est possible, puis leur ordonnée correspondante.

Les abscisses sont représentées sur l'axe ……. du repère.

Les ordonnées sont représentées sur l'axe …… du repère.



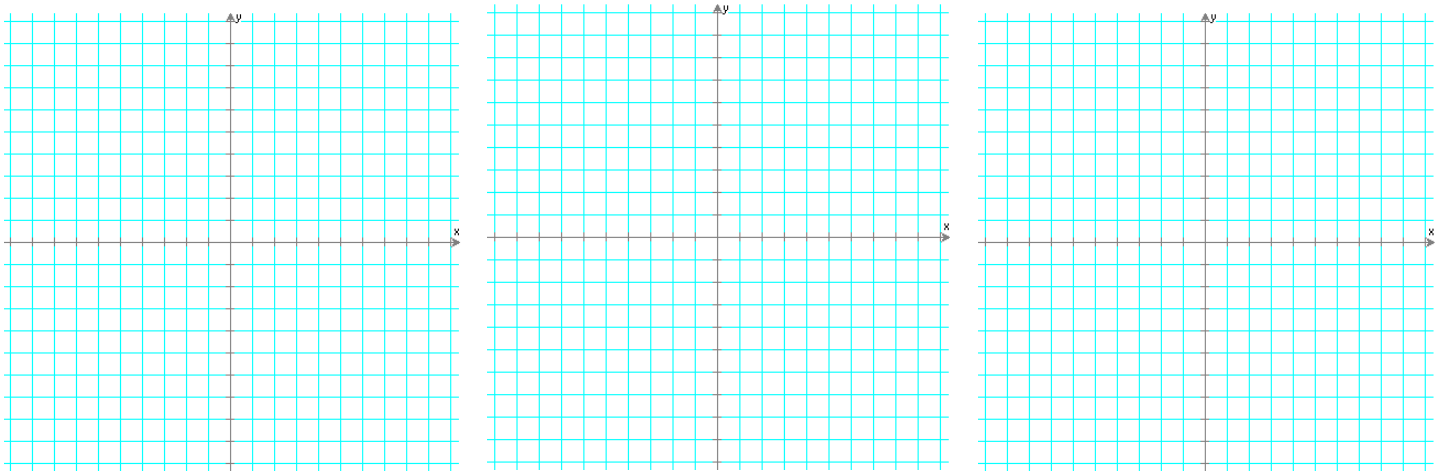
3. Ecrire dans, le tableau ci-dessous la fonction qui lie les ensembles de nombres suivants :

E_1	2	3	8	12
E_2	1	$\frac{3}{2}$	4	6
E_3	-2	-3	-8	-12
E_4	5	7	17	25

Abscisses x	Ordonnées $f(x)$	Fonction f
E_1	E_2	$f(x) =$
E_2	E_3	$g(x) =$
E_2	E_1	

E_3	E_2	
E_1	E_3	
E_1	E_4	$h(x) =$
E_3	E_4	
E_4	E_1	
E_4	E_3	

4. Construire dans les repères ci-dessous, les courbes représentatives des fonctions f, g, h



Les courbes représentatives des fonctions f et g sont des ……

Ces fonctions sont des fonctions ……

La courbe représentative de la fonction h est une ……..

Cette fonction est une fonction ……

Comment déterminer des images ?

Nom	Expert	Acquis	En cours d'acquisition	Non acquis
Évaluation du niveau de maitrise du socle	Très bonne maitrise	Maitrise satisfaisante	Maitrise fragile	Maitrise insuffisante

Comment déterminer des antécédents ?

Nom	Expert	Acquis	En cours d'acquisition	Non acquis
Évaluation du niveau de maitrise du socle	Très bonne maitrise	Maitrise satisfaisante	Maitrise fragile	Maitrise insuffisante

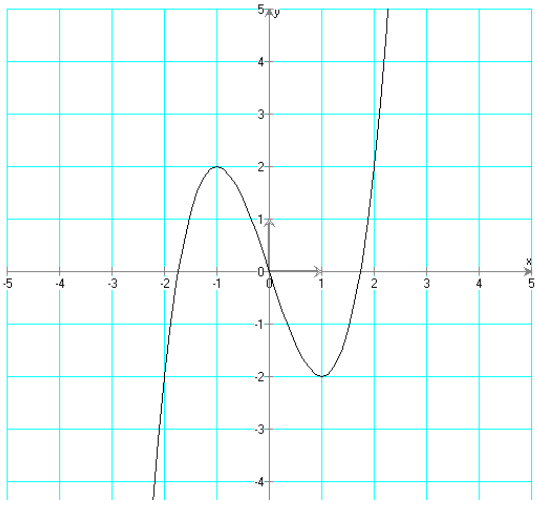
L'image d'une abscisse par une fonction f est son ……correspondante, elle se situe donc sur l'axe des ……..

Les antécédents d'une ordonnée par une fonction f sont ses ……correspondantes, elles se situent donc sur l'axe des ……..

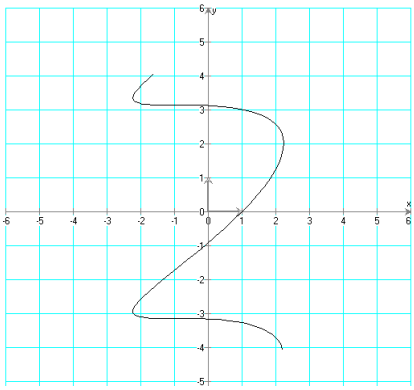
1. A l'aide du tableau de la fonction f ci-après, déterminer :
   - les images de 4 ; de 2 ;
   - les antécédents de -3 ; de 2 et de 0.

x	-2	1	0	4	2
$f(x)$	-3	4	2	-3	0

2. A l'aide du graphique de la courbe de la fonction f ci-après, déterminer :
   - les images de -2 ; de -1 et de 0 ;
   - les antécédents de 4 ; 2 ; 1 et 0.



3. Que vous inspire cette courbe ?



……

……

……

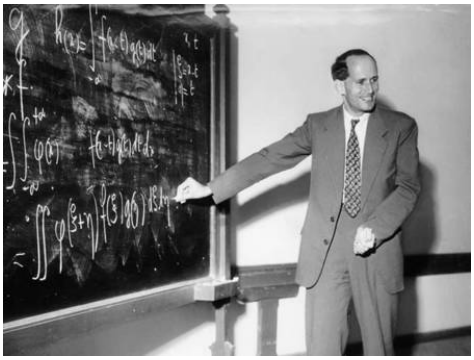
……

4. A l'aide de l'expression de la fonction f : $f(x) = x^2 - 2x + 1$, déterminer :
   - les images de 0, -1 et 3 ;
   - les antécédents de 0 et de 1.

5. A l'aide d'un algorithme que vous rédigerez sur votre calculatrice, déterminer :
   - les images de 129 ; de 1295 et de -234 par la fonction $f(x) = -2x + x^3$;
   - les images de tous les entiers compris entre 50 et 70 par cette même fonction ;

Comment savoir si un point du plan appartient à une courbe ?

Nom	Expert	Acquis	En cours d'acquisition	Non acquis
Évaluation du niveau de maitrise du socle	Très bonne maitrise	Maitrise satisfaisante	Maitrise fragile	Maitrise insuffisante



6. Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 2$.
   - Les points suivant appartiennent-ils à la courbe représentative de f ?

$(3,25)$	OUI	NON
$(-1,-5)$	OUI	NON
$(1,1)$	OUI	NON
$(0,-2)$	OUI	NON

7. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x+1}{-x-2}$.
   - Les points suivant appartiennent-ils à la courbe représentative de g ?

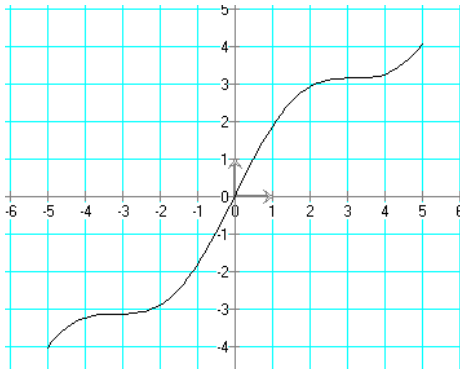
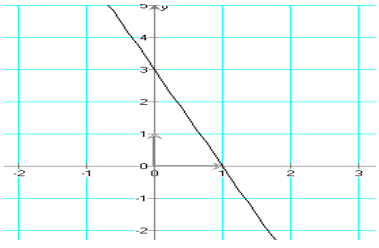
$(0,-0,5)$	OUI	NON
$(-1,0)$	OUI	NON
$(-2,0)$	OUI	NON
$(2,-0,25)$	OUI	NON

8. Traduire les phrases suivantes à l'aide d'égalités, et placer les points correspondants dans un repère, pour enfin construire une courbe à partir de ces informations :

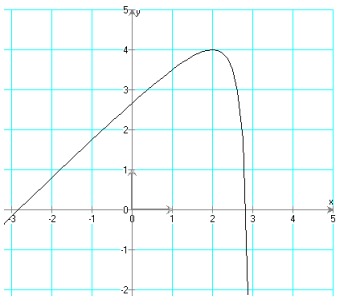
   - L'image de 3 par f est 2: ……
   - Le point $A(-1;5)$ appartient à la courbe Cf: ……
   - –3 est un antécédent de 2 par la fonction f: ……..
   - La courbe Cf passe par $B(-4;0)$: ……
   - L'ordonnée du point de Cf d'abscisse 2 est nulle: ……
   - 4 est l'image de 0 par la fonction f: …….

Comment construire un tableau de variations à partir d'une courbe ?

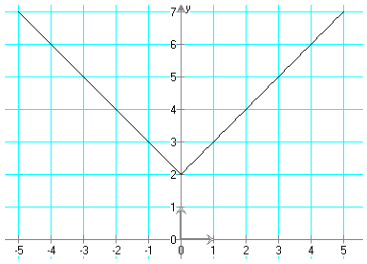
Nom	Expert	Acquis	En cours d'acquisition	Non acquis
Évaluation du niveau de maitrise du socle	Très bonne maitrise	Maitrise satisfaisante	Maitrise fragile	Maitrise insuffisante

Une fonction est dite croissante si sa courbe représentative est croissante. Mathématiquement, **Une fonction f est dite croissante** **$si\ a \leq b\ alors\ f(a) \leq f(b)$**	
Une fonction est dite décroissante si sa courbe représentative est décroissante. Mathématiquement, **Une fonction f est dite décroissante** **$si\ a \leq b\ alors\ f(a) \geq f(b)$**	

Une fonction possède un maximum M si les différentes valeurs de la fonction sont toutes inférieures à M ;

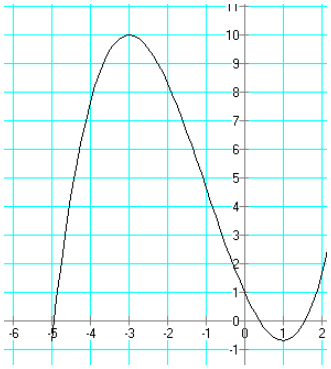


Une fonction possède un minimum m si les différentes valeurs de la fonction sont toutes supérieures à m ;



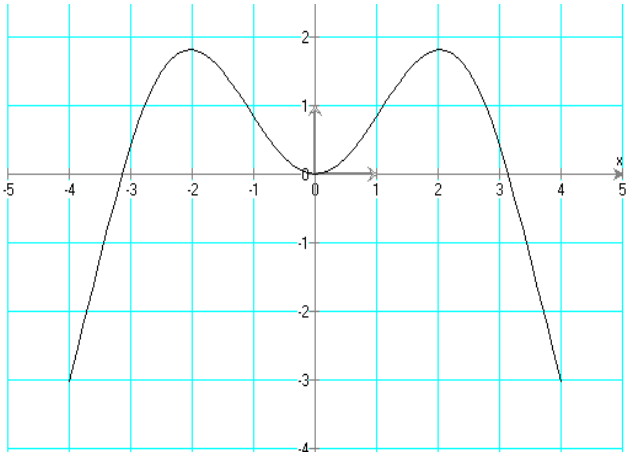
Un tableau de variations est un tableau qui décrit l'évolution de la courbe représentative d'une fonction.

x	-5	-3
f	0	10

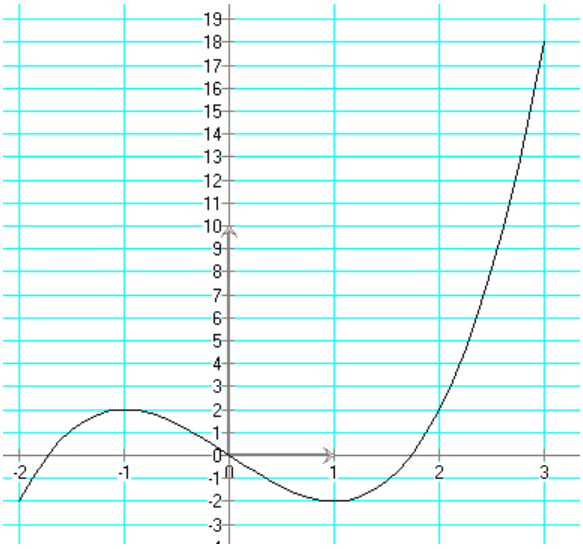


9. Dresser le tableau de variations des courbes représentatives des fonctions suivantes :

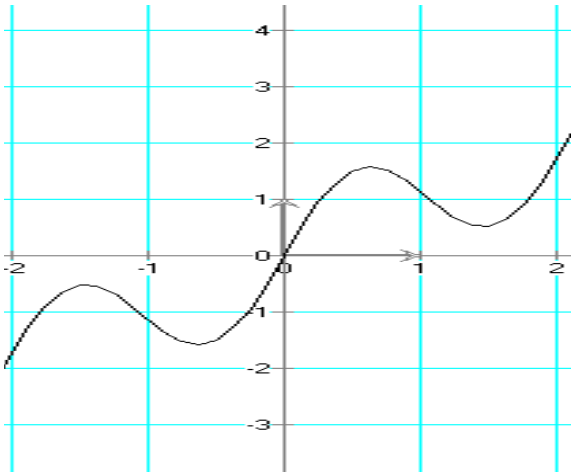
a.



b.



c.



10. Puis, compléter le récapitulatif ci-dessous à l'aide d'intervalles ou de valeurs :

Courbe représentative de la fonction	Domaine de définition	Croissante sur	Décroissante sur	Maximum		Minimum	
				En $x =$	Valeur	En $x =$	Valeur
A							
B							
C							

11. Parallèlement à ce travail, construire dans chaque cas, une courbe répondant aux conditions des tableaux de variations ci-dessous :

-

x	-7	-3	2	5
f	2 ↗	5 ↘	-3 ↗	2

-

x	-2	-1	2	3	5	7
g	-2 ↗	2 ↘	-1 ↗	5 ↘	-1 ↗	2

- Déterminer alors les images de -3 ; 2 et 5 ;
  Les antécédents de -3 ; 2 et 5 ;

- Les images de -1 ; 2 et 5 ;
  Les antécédents de 2 ; 5 ; -1 ;

12. Comparer en utilisant $\leq ou\ \geq$:
    - $f(-3)$ et $f(3)$;
      $f(-4)$ et $f(2)$;

    - $g(-1)$ et $g(6)$;
      $g(0)$ et $g(7)$;

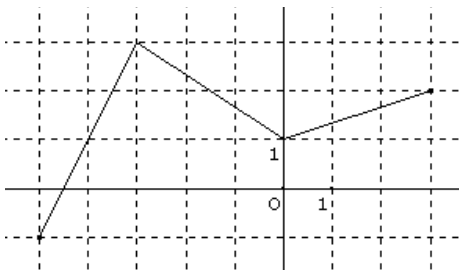
13. A l'aide de votre calculatrice, dresser le tableau de variations des fonctions suivantes, sur les intervalles indiqués :
    - $f(x) = x^2 + 3x - 4$ sur $[-5,2]$;
    - $g(x) = x^5 - 5x$ sur $[-2,3]$;
    - $h(x) = \cos(x)$ sur $[0,2\pi]$;

14. On considère la fonction f définie sur [-5 ;3] dont voici la représentation graphique :
    - Dresser le tableau de variation de f.
    - Recopier et compléter les phrases suivantes :

      $Si\ -5 \leq x \leq -3, alors\ \ldots \leq f(x) \leq \ldots$

      $Si\ -3 \leq x \leq 0,\ alors\ \ldots \leq f(x) \leq \cdots$

      $Si\ -5 \leq x \leq 3,\ alors\ \ldots \leq f(x) \leq \ldots$



15. Construisez des courbes à partir de ces contraintes algébriques :

1. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f sachant que :
   - f est définie sur l'intervalle [0 ; 5] ;
   - f est croissante sur cet intervalle ;
   - $f(0) = 1$ *et* $f(5) = 4$.

2. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f sachant que :
   - f est définie sur l'intervalle [-3 ; 3] ;
   - f est décroissante sur [-3 ; -1] ;
   - f est croissante sur [-1 ; 3] ;
   - pour tout $x \in [-3\ ;\ 3], -1 \leq f(x) \leq 4$.

3. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f sachant que :
   - f est définie sur l'intervalle [-3 ; 4] ;
   - f admet un minimum en -1 et un maximum en 2 ;
   - les images de -3 et de 4 sont respectivement 2 et 1 ;
   - 0 a deux antécédents : -2 et 1.

English corner

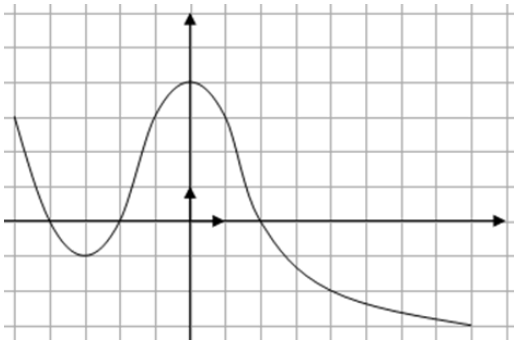
Definition : A function is a process from a set of values called the domain to a set of values called the range. Each number x in the domain is called the input. Each number y in the range is called the output or the image of x.

1. Function defined by a table of values

x	-4	-1,5	0	1	2,6	6
$f(x)$	7	-1	-1	3	5,5	-3,1

   a. Sketch a graph of function defined by the following table of values.
   b. Have all pupils the same graph ? Why ?

2. Function defined by a graph :



   a. The diagram shows the graph of a function f. What is the domain of f ?
   b. What is the output when the input is -2 ?
   c. Find values of x (inputs) when $f(x) = 1$; when $f(x) = 3$.

3. Function defined by an algebraic formula $f(x) = \frac{x}{x-1}$.
   Give the output when $x = 0, x = \frac{1}{2}, x = -1; x = \sqrt{2}$.

MATHEMATICIANS

E Y Q K P M Z V D S C L T U H

U D V A D R O B T B Z A E W Q

G D H U S I M D F S W L B Z U

W U F H B B U M Y D R U J E W

D A L E M B E R T O S H C B Z

C S Q J B U U H K S P B L D S

W A L O O G Y S A I M C I W C

A B T V P Q B R L S H M L G H

L D G T O O T C U C K Z O O W

I A E P S S I M F P Q E Z G A

I P S E R E M N C C G Q O K R

Z Z A E P X Z C C N W A F K T

M N I F L Q R A G A N C T E Z

R E G Y E J F A L K R W D C T

W F E B X W Z J E B X E M H L