Variables Aléatoires

Exercice 1

Après étude d'un dés truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6, on obtient la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,2	0,15	0,12	0,17	0,08	0,28

Déterminer les probabilités de chacun des éléments suivants :

1. A : "*Le résultat est supérieur ou égal à 4*".
2. B : "*Le résultat est un nombre impair*".
3. C : "*Le résultat est un nombre pair*".

Exercice 2

Une expérience aléatoire consiste à lancer deux dés, rouge et bleu, à six faces sumultanément et à considérer la somme obtenue par ces deux dés. On suppose les dés parfaitement équilibrés.

1. Décrire l'univers des issues possibles.
2. a. Compléter le tableau ci-dessous :

Bleu / Rouge	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

   a. Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.

Exercice 3

Une urne contient quatre boules bleues numérotées de 1 à 4, trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et deux boules vertes numérotées de 1 à 2.

1. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à chacune boule le numéro inscrit sur celui-ci.
   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
2. Au tirage d'une boule dans cette urne, on associe les règles de jeu suivantes :
   - Si la boule tirée est bleu et porte un entier pair, le joueur gagne 2 €.
   - Si la boule tirée n'est pas bleu et porte un entier pair, le joueur gagne 3 €.
   - Sinon le joueur ne gagne rien.

   On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui associe au tirage d'une boule le gain obtenu.

   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.

Exercice 4

Un jeu consiste à lancer dé dodécaèdre parfaitement équilibré dont les faces sont numérotés de 1 à 12. Le jeu consiste à lancer une fois le dé.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque valeur d'une face le nombre de diviseurs de cette valeur.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatore $\mathcal{X}$.

Exercice 5

En fin d'année l'association des élèves d'un lycée organise une tombola : 100 tickets sont mis en vente à 10 euros l'unité.

Voici les différents tickets gagnants :
- 2 tickets gagnet 50 € ;
- 10 tickets gagnent 20 € ;
- 20 tickets gagnent 10 €.

1. Quelle est la somme des gains de cette tombola ?
2. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   - A : "*le ticket ne gagne rien*" ;
   - B : "*le ticket gagne 10 €*" ;
   - C : "*le ticket gagne 20 €*" ;
   - D : "*le ticket gagne 50 €*" ;
3. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque ticket la valeur du ticket gagnant :
   a. Déterminer l'espérance $E(\mathcal{X})$ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
   b. Déterminer la variance $V(\mathcal{X})$ et l'écart type $\sigma(\mathcal{X})$ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice 6

Un jeu consiste à tirer une carte dans un jeu de 32 cartes. On associe à chaque carte un gain :

- Le Roi de Coeur rapporte 5 €.
- Une autre figure de Coeur rapporte 3 €.
- Une autre figure rapporte 1 €.
- Les autres cartes ne font pas gagner.

On modélise le gain de ce jeu par la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
2. a. Déterminer la valeur exacte de l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
   b. Si la mise d'une partie est de 1 €, ce jeu est-il favorable ou défavorable à l'organisateur.
3. Déterminer la variance et l'écart type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ arrondie au centième près.

Exercice 7

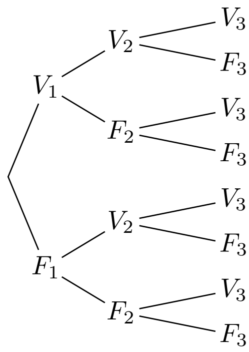
Un jeu consiste à lancer dé dodécaèdre parfaitement équilibré dont les faces sont numérotés de 1 à 12. Le jeu consiste à lancer une fois le dé.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque valeur d'une face le nombre de diviseurs de cette valeur.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatore $\mathcal{X}$.

Exercice 8

Un QCM *(questionnaire à choix multiples)* est proposé à des élèves : il comporte trois questions et pour chacune de ces questions, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste.
On souhaite étudier le pourcentage de réussite à ce QCM si les élèves y répondent complétement de réponse aléatoire ; on suppose alors que les réponses données à chacune des questions sont indépendantes entre elles.



On note :
- F_i : "*La réponse fournit à la question i est fausse*" ;
- V_i : "*La réponse fournit à la question i est vraie*" ;

1. Compléter l'arbre pondéré présenté ci-dessus.

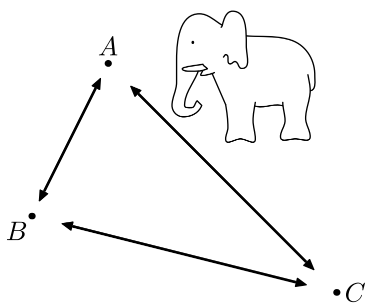
2. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses fournies au QCM.

   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

   b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice 9

Un éléphant se déplace en trois points de son territoire. Il part du point A et effectue trois déplacements :



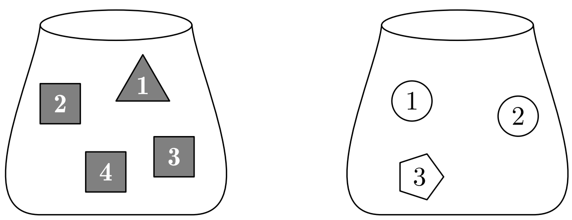
Soit il tourne dans le sens des aiguilles d'une montre avec 2 chances sur trois sinon il se déplace dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On suppose que chacun de ses déplacements est indépendants des précédents.

Quelle est la probabilité qu'au bout de ces déplacements il arrive sur le point B ?

Exercice 10

On considère deux urnes A et B contenant respectivement quatre et trois objets comme représentés ci-dessous :



Urne A Urne B

Le jeu consiste à tirer un objet de l'urne A puis de l'urne B :

1. Combien de couples d'objets différents peut-on obtenir à l'issue des deux tirages ?

2. On considère les deux évènements suivant :
   - C : "*Le couple d'objet comprend un carré*"
   - P : "*le couple d'objet comprend un pentagone*"

   Déterminer les probabilités suivantes :

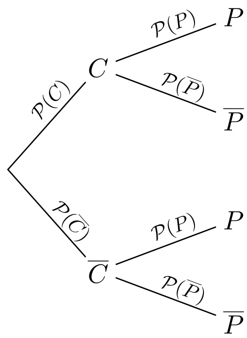
   a. $\mathcal{P}(C\cap P)$ b. $\mathcal{P}(C\cap\overline{P})$

   c. $\mathcal{P}(\overline{C}\cap P)$ d. $\mathcal{P}(\overline{C}\cap\overline{P})$

3. a. Déterminer les deux probabilités suivantes :
   $\mathcal{P}(C)$; $\mathcal{P}(P)$

   b. Compléter l'arbre ci-dessous avec les probabilités indiquées :

   c. Peut-on retrouver les résultats de la question 2. à l'aide de l'arbre de probabilité de la question précédente.



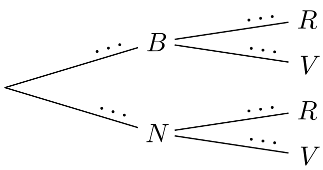
Exercice 11

On dispose de deux urnes A et B contenant chacune des boules indiscernables au toucher. Voici la composition des urnes :
- Urne A : trois boules noires et deux boules blanches ;
- Urne B : cinq boules rouges et deux boules vertes.

On tire successivement une boule dans chacune des urnes.

On considère les évènements suivants :
- B : "*la boule tirée est blanche*" ;
- N : "*la boule tirée est noire*" ;
- R : "*la boule tirée est rouge*" ;
- V : "*la boule tirée est verte*".

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(B\cap R)$ b. $\mathcal{P}(B\cap V)$ c. $\mathcal{P}(N\cap R)$

3. a. Donner la valeur de : $\mathcal{P}(B\cap R)+\mathcal{P}(N\cap R)$.

   b. Que remarque-t-on ?

Exercice 12

Un petit restaurant propose à son menu trois plats et deux desserts. Voici la description de son menu :

- Spaguetti .... 6 €
- Filet de boeuf ..... 7 €
- Entrecote .... 8 €
- Salade de fruits ..... 2 €
- Crème anglaise ...... 3 €

Chaque client rentrant dans les restaurants prend exactement un plat et un dessert.

1. En prenant un client au hasard à la sortie du restaurant, préciser quel peut être le montant de sa facture.

2. On supposant que toutes les combinaisons ${}^{\text{plat}}\!/_{\text{dessert}}$ ont la même probabilité d'être choisies par un client.

   a. Combien de combinaison peut-on créer à partir de ce menu ?

   b. Quel est la probabilité pour qu'un client ait payé 8 € ? 11 € ?

   c. Montrer que la probabilité d'avoir une facture d'un montant de 10 € est de $\dfrac{1}{3}$.

   d. Compléter le tableau ci-dessous :

Montant de la facture	8	9	10	11
Probabilité				

Exercice 13

Une pépinière propose trois types d'arbres : des acacias, des platanes, des chênes. Chacun de ses arbres peuvent être achetés à des tailles différentes : soit sous la forme de "*jeune pousse*" *(*0,75 *mètre)*, soit sous la forme "*adulte*" *(*2 *mètres)*.

A l'âge de jeune pousse, les acacias, platanes et chênes valent respectivement 50 €, 65 € et 80 €.
Si le client veut acheter la forme adulte, il faut alors qu'il rajoute 15 €.

Lors de son bilan de fin d'année, il remarque que 40 % des arbres vendus sont des chênes et que les acacias et platanes se partagent à parts égales les autres ventes.
Il remarque aussi que quelque soit le type d'arbres, le quart des ventes s'effectuent toujours sur les arbres "*adultes*".

L'expérience aléatoire considérée consiste à tirer au hasard une facture de l'exercice 2015.

On considère les évènements suivants :

- A : "*L'arbre acheté est un acacia*"
- P : "*L'arbre acheté est un platane*"
- C : "*L'arbre acheté est un chêne*"
- J : "*L'arbre est une jeune pousse*"

1. Dresser un arbre pondéré représentant cette situation.

2. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ associant à la facture tirée son montant.

   a. Dresser le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

   b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

   c. Donner l'écart-type de $\mathcal{X}$ au dixième près.

