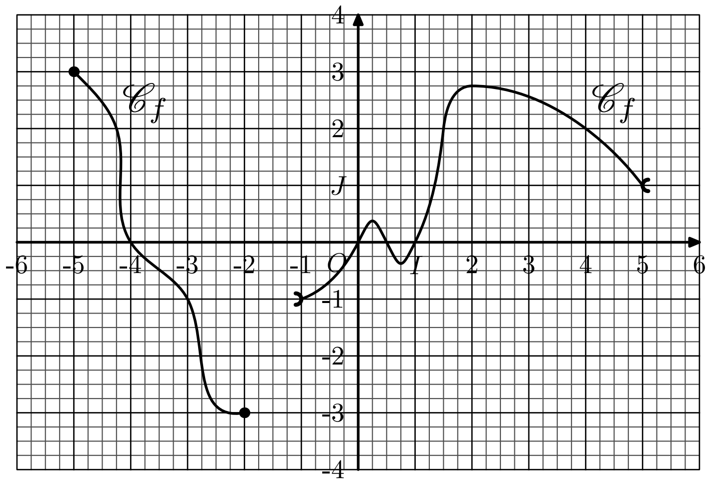
Exercice 1

On munit le plan du repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal. Ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer, graphiquement, l'image des nombres suivants par la fonction f :

   a. -3 b. 1 c. 2
3. Déterminer, graphiquement, l'ensemble des antécédents du nombre de 2 par la fonction f.
4. a. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geqslant 2$.

   b. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) < 0$.

Exercice 2

1. On considère les trois fonctions f, g, h définies par :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2-3x+2}{2x} \quad ; \quad g : x \longmapsto 2^x$$

$$h : x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{7x-3}} \quad ; \quad j : x \longmapsto \frac{(6x-3)^2}{-36x^2+36x-9}$$

   Déterminer les images du nombre 4 respectivement par les fonctions f, g, h et j.
2. On considère les deux fonctions k, ℓ définies par :

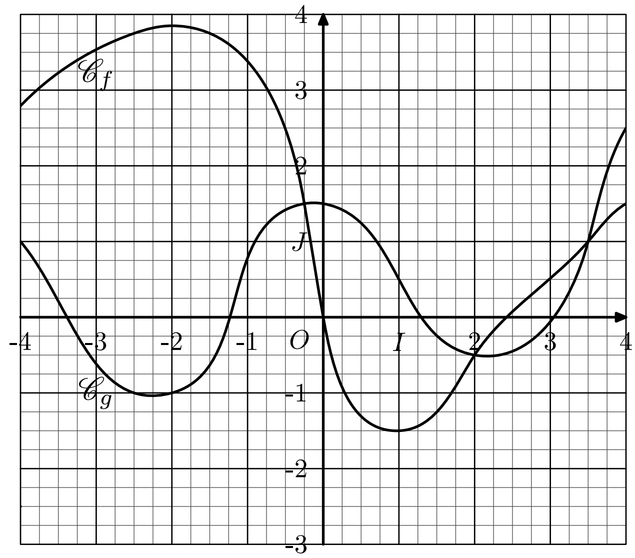
$$k : x \longmapsto 4x-5 \quad ; \quad \ell : x \longmapsto 9x^2-6x$$

   a. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre $\frac{1}{2}$ par la fonction k.

   b. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre -1 par la fonction ℓ. *(pensez à une factorisation)*.

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4\,;4]$:



On considère l'inéquation : $f(x) < g(x)$

1. Parmi les nombres ci-dessous, lesquels sont solutions de cette inéquation :

   a. $-2{,}5$ b. $-0{,}25$ c. 1
2. Résoudre graphiquement cette inéquation.

Exercice 4

On considère la fonction f dont voici le tableau de variation :

x	-3		0		2		5
Variation de f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

1. Dire si les assertions suivantes sont vraies, fausses ou indécidables. Dans chaque cas, justifier votre affirmation :

   a. $\mathcal{D}_f = [-2\,;+\infty[$

   b. Le nombre 2, par la fonction f, n'admet qu'un antécédent.

   c. f est bornée sur son ensemble de définition.

   d. L'image de 4 est un nombre négatif.
2. On donne les informations suivantes à propos de la fonction f : l'image de -1 *(resp. 3)* par la fonction f est 3 *(resp. 0)*.

   Donner, sans justification, l'image des intervalles ci-dessous par la fonction f :

   a. $[0\,;5]$ b. $[-1\,;2]$ c. $]-3\,;3[$

Exercice 5

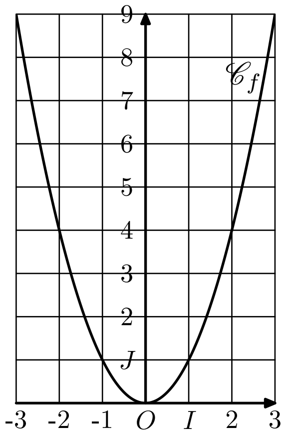
Chacune des limites ci-dessous représente une forme indéterminée ; effectuer les transformations algébriques adéquates pour déterminer chacune de ses limites :

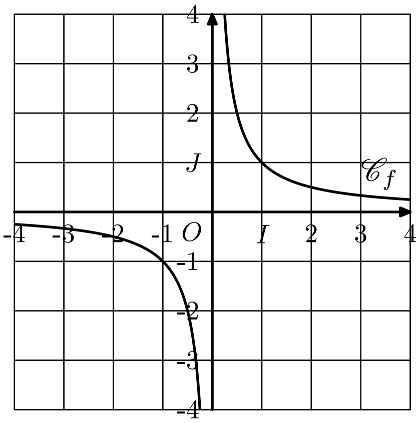
a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\sqrt{x}-x$ b. $\lim\limits_{x\mapsto1^+} \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x-2}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto2^-} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{5x^2-3x+1}{2x^2+x-2}$

Exercice 6

Dans des repère $(O\,;I\,;J)$ orthormaux, sont données ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement de la fonction carrée et de la fonction inverse :





Compléter, sans justification, les assertions suivantes :

1. Si $x\in[1\,;3[$ alors $x^2\in\ldots\ldots$
2. Si $x\in]-1\,;2]$ alors $x^2\in\ldots\ldots$
3. Si $x\in]2\,;4]$ alors $\dfrac{1}{x}\in\ldots\ldots$
4. Si $x\in]0\,;2]$ alors $\dfrac{1}{x}\in\ldots\ldots$
5. Si $x\in\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]$ alors $\dfrac{1}{x}\in\ldots\ldots$

Exercice 7

Pour chacune des fonctions, déterminer les caractéristiques de leur extrémum et dresser le tableau de variation :

a. $f : x\longmapsto 2x^2+8x+1$ b. $g : x\longmapsto -x^2+2x+1$

c. $h : x\longmapsto x^2+4x+4$ d. $j : x\longmapsto -3x^2+9x-2$

e. $k : x\longmapsto 3x^2+2x+2$ f. $\ell : x\longmapsto -x^2+2\sqrt{3}x-1$

Exercice 8

Sans justification, répondre aux questions suivantes :

1. Résoudre l'inéquation : $\sqrt{x}>4$
2. Résoudre l'inéquation : $\sqrt{x}<9$

Exercice 9

Soit f la fonction dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$$f(x)=-2\sqrt{x+1}+3$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de la fonction f est : $\mathcal{D}_f=[-1\,;+\infty[$
2. Etablir que la fonction f est décroissante sur son ensemble définition.

Exercice 10

Ecrire les expressions suivantes sans racines carrées au dénominateur :

a. $\dfrac{2x}{\sqrt{x}-1}$ b. $\dfrac{x^2}{x+2\sqrt{x}}$ c. $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

Exercice 11

Etablir l'égalité :
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}=1$$

Exercice 12

On considère la fonction f définie par la relation :
$$f(x)=\frac{-2}{\sqrt{x}+3}$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.
2. Etablir que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 13

De manière algébrique, calculer les expressions suivantes :

a. $|2-3|$ b. $|5+3|$ c. $|2\times(4-5)$

d. $|4\times2-5\times7|$ e. $|7+2|\times|4-6|$ f. $|2-3|\times2$

g. $|5{,}5|+|-5{,}5|$ h. $|-5{,}5|-|4{,}5|$ i. $\dfrac{|2\times4-7|}{|3\times3-12|}$

Exercice 14

Résoudre les équations suivantes :

a. $|2-x|=2{,}5$ b. $|x+100|=1$

c. $3\times|x+2|=1$ d. $|2-x|\times2=1$

e. $3\times|x+5|+3=9$ f. $2\times|2-x|+4=1$

Exercice 15

Résoudre les équations suivantes :

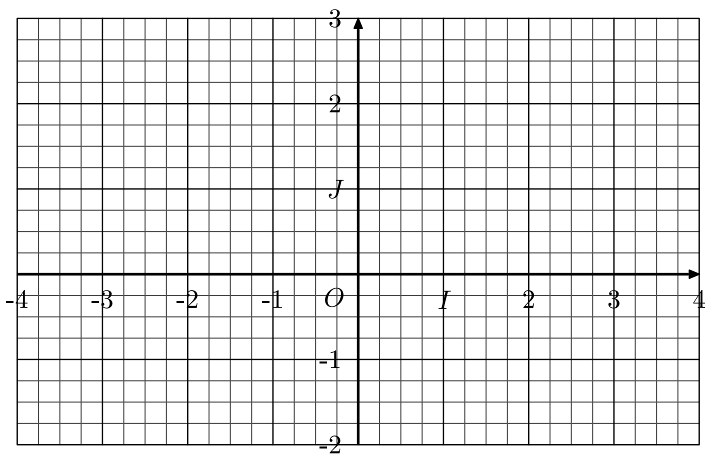
a. $|2x-1|=|-x+1|$ b. $|3x-1|=|3x+1|$

c. $|x-2|=5$ d. $|x+2|=6$

Exercice 16

On considère les fontions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=|x+2| \quad ; \quad g(x)=|x|-1$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g :



1. a. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessus.
   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geqslant1$.
2. a. Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ dans le repère ci-dessus.
   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x)\leqslant0$.

Exercice 17

On considère l'équation (E) définie par :
$$(E) : \ |x+1|+|x-1| \leqslant 5$$

On considère les trois intervalles suivants :
$$I =]-\infty\,;-1] \quad ; \quad J=[-1\,;1] \quad ; \quad K=[1\,;+\infty[$$

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f : x \longmapsto |x+1|+|x-1|$$
Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des trois intervalles I, J et K.

2. a. Résoudre l'inéquation (E) sur chacun des trois intervalles I, J et K.

   b. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 18

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;4]$ dont le tableau de variation est données ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	1	4
Variation de f	-5 ↗	-2 ↗	2 ↘	-1

On considère les fonction g, h et j définies par :
$$g(x) = f(x)+2 \quad ; \quad h(x) = 2\cdot f(x) \quad ; \quad j(x) = -f(x)$$

Dresser les tableaux de variation des fonctions g, h et j.

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $[-4\,;4]$ par la relation :
$$f(x) = x^2-4x+5$$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. Soit g la fonction définie par la relation :
$$g : x \longmapsto \sqrt{f(x)}$$

   a. Justifier que la fonction g est définie sur $[-4\,;4]$.

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $[-4\,;4]$.

Exercice 20

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{8x-11}{2x-3}$$

   a. Déterminer les réels a et b réalisant l'identité :
$$f(x) = a+\frac{b}{2x-3}$$

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :
$$g(x) = \frac{x+1}{2-x}$$

   a. Déterminer les réels a et b réalisant l'identité :
$$g(x) = a+\frac{b}{2-x}$$

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction g

Exercice 21

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$$f(x) = \sqrt{\frac{3-2\cdot x}{2\cdot x+3}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction de la fonction f.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ par la relation :
$$g(x) = \frac{3-2\cdot x}{2\cdot x+3}$$

   a. Déterminer les réels a et b réalisant l'identité suivante :
$$g(x) = a+\frac{b}{2\cdot x+3}$$

   b. Etablir le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.

Exercice 22

On considère les deux fonctions suivantes :
$$f : x \longmapsto \sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{4x+3} \quad ; \quad g : x \longmapsto \sqrt{(2x-1)(4x+3)}$$

1. a. A l'aide d'une calculatrice graphique, tracer la courbe représentative de la fonction f, puis celle de la fonction g.

   b. Graphiquement, donner l'intervalle sur lequel ces deux fonctions coïncident.

2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

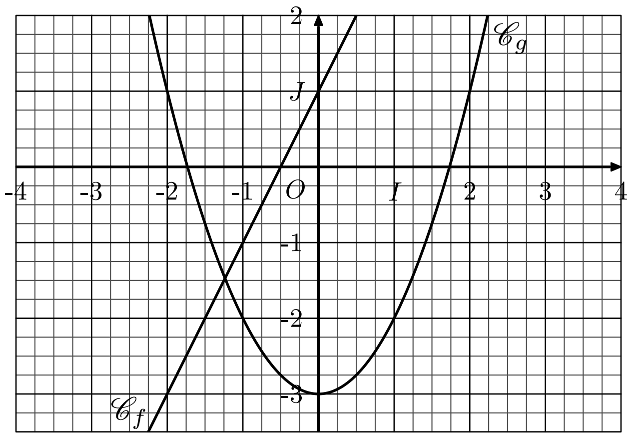
3. a. Déterminer le tableau de signe de l'expression algébrique $(2x-1)(4x+3)$.

   b. En déduire le domaine de définition de la fonction g.

Exercice 23

On considère les deux fonctions f et g définie sur $[-4\,;4]$ par les relations :
$$f(x) = 2x+1 \quad ; \quad g(x) = x^2-3$$

On donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



1. Par lecture graphique, compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

2. On considère le programme de calcul suivant :

- Prendre un nombre x ;
- Déterminer l'image de x par la fonction f ; on note ce nombre x' ;
- Déterminer l'image de x' par la fonction g ; on note ce nombre $g\big(f(x)\big)$.

On peut noter ce programme de calcul par la chaine :
$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g\big(f(x)\big)$

a. Déterminer la valeurs des expressions suivantes :
$g\big(f(-1)\big)$; $g\Big(f\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big)$

b. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g\big(f(x)\big)$					

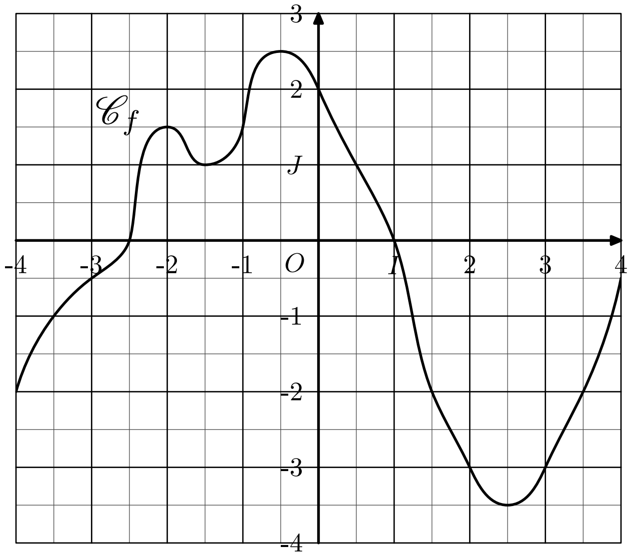
On vient de créer une nouvelle fonction qui à un nombre x associe l'image $g\big(f(x)\big)$. Cette fonction s'appelle la fonction composée de f par g et se note $g \circ f$.

3. Tracer dans le repère ci-dessus la courbe $\mathscr{C}_{g\circ f}$ représentative de la fonction $g \circ f$.

4. Donner l'expression, en fonction de x, de la fonction $g \circ f$.

Exercice 24

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. Calculer les images suivantes :
   a. $(f \circ f)(1)$ b. $(f \circ f)(-2)$ c. $(f \circ f)(3)$

2. On définit la fonction f^n comme la fonction composée n fois de la fonction f par elle-même. Déterminer la valeur des images suivantes :
   a. $f^3(1)$ b. $f^3(-3)$ c. $f^4(-1)$

Exercice 25

Pour chacun des couples de fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de la fonction $g \circ f$:

1. $f\colon x \longmapsto 3x-5$; $g\colon x \longmapsto x^2$
2. $f\colon x \longmapsto x^2-1$; $g\colon x \longmapsto -2x+4$
3. $f\colon x \longmapsto x^2+1$; $g\colon x \longmapsto x^2+1$

Exercice 26

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression :
$$f(x) = \frac{2{\cdot}x^2+4{\cdot}x+1}{x^2+2{\cdot}x+2}$$

1. Déterminer les deux réels a et b vérifiant l'identité :
$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2+1}$$

2. a. Déterminer le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

   b. Démontrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.

