Compiler exercice   Compiler correction   Plus d'option

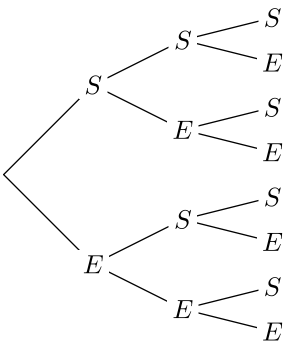
Première S/Bernoulli et loi binomiale

1. Répétitions indépendantes d'épreuves de Bernoulli :

Exercice 5382

On considère une épreuve admettant que deux issues : une nommé "*succés*" et noté S de probabilité 0,4 ; l'autre nommé "*échec*" et notée E.

On décide de répeter trois fois cette même épreuve. On obtient l'arbre de probabilité ci-contre.



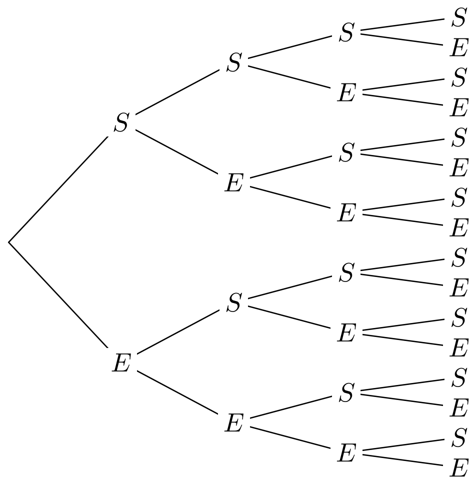
On suppose ces répétitions indépendantes entre elles.

1. Compléter cet arbre de probabilité?
2. a. Combien de chemins comportent 3 succés?
   b. Donner la probabilité d'obtenir trois succés à l'issue de cette expérience aléatoire?
3. a. Combien de chemins comportent 0 succés?
   b. Donner la probabilité de n'obtenir aucun succés à l'issue de cette expérience aléatoire?
4. a. Combien de chemins comportent 2 succés?
   b. Donner la probabilité d'obtenir exactement deux succés à l'issue de cette expérience aléatoire?

Exercice 5383

On considère une épreuve comportant que deux issues : une issue de probabilité 0,3 noté S ; l'autre issue est notée E.

On considère l'expérience aléatoire composée de quatre répétitions de l'épreuve précédente. Cette nouvelle expérience aléatoire est représentée par l'arbre de choix ci-dessous :



1. Combien d'évènements élémentaires composent cette expérience aléatoire?
2. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque évènement élémentaire, compte le nombre d'évènements S réalisés.

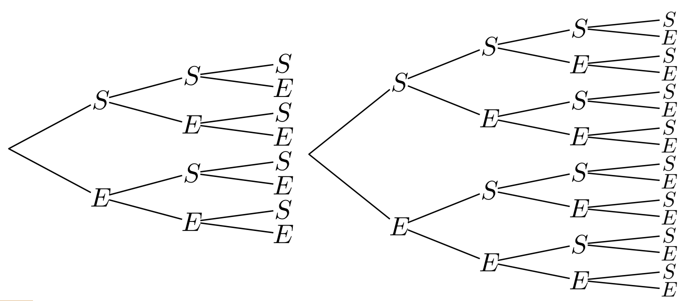
   Déterminer les probabilités suivantes arrondies au millième :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$

2. Coefficients binomiaux :

Exercice 5384

Voici les arbres de choix associés à la répétition d'une épreuve de Bernoulli respectivement 3 et 4 fois :



1. Pour la répétition trois fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succés	0	1	2	3
Nombre d'issues				

2. Pour la répétition quatre fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succés	0	1	2	3	4
Nombre d'issues					

3. Y a-t-il une méthode pour obtenir le second tableau à partir du premier?

Exercice 5385

1. Reconstruire le triangle de Pascal jusqu'à $n=7$.
2. A l'aide du tableau de la question 1. , donner les valeurs des coefficients binomiaux suivant :

   a. $\binom{5}{3}$ a. $\binom{4}{0}$ a. $\binom{4}{2}$ a. $\binom{7}{5}$

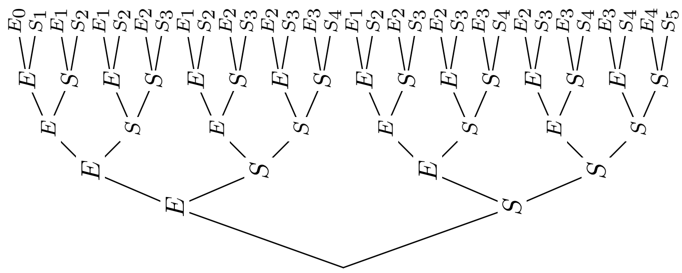
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants :

   a. $\binom{5}{3}$ a. $\binom{12}{5}$ a. $\binom{8}{6}$ a. $\binom{7}{2}$

Exercice 5203

La figure ci-dessous représente la répétition de cinq épreuves de Bernoulli où les deux issues sont S *(succés)* et E *(échec)*.

Le nombre en indice sur le cinquième choix représente le nombre de succés réalisés dans le chemin choisi.



1. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succés	0	1	2	3	4	5
Nombre de chemins associés						

2. On considère la même épreuve de Bernoulli mais répétée six fois :

   a. Donner le nombre de chemins réalisant 4 succés lorsque l'on répète six fois une épreuve de Bernoulli *(on pourra compléter l'arbre de choix ou raisonner)*.

   b. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succés	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de chemins associés							

3. Loi binomiale :

Exercice 6064

Soit $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 15 et 0,35. C'est à dire : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(15\,;0{,}35)$

Déterminer la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=7)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

Exercice 4323

Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

Déterminer la probabilité exacte pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie, puis sa valeur arrondie au dixième.

Exercice 4151

Une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à $]0\,;1[$.

Sans justification, indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

- **Proposition 1 :** si $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)=8{\cdot}\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ alors $p=\dfrac{2}{3}$.
- **Proposition 2 :** si $p=\dfrac{1}{5}$ alors $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)=\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$.

4. Loi binomiale et évènements complémentaires :

Exercice 5387

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètre $n=15$ et $p=0{,}63$.

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux suivants :

   a. $\binom{15}{13}$ b. $\binom{15}{14}$ c. $\binom{15}{15}$

2. Déterminer la valeur exacte des probabilités suivantes, puis arrondie à 10^{-4} près :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=13)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=14)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=15)$

3. En déduire la valeur, arrondie à 10^{-4} près, de la probabilité de l'évènement $\{\mathcal{X}\leqslant 12\}$.

Exercice 4213

Lors d'une épidémie chez des bovins, un test de cette maladie est mis en place. Une étude est faite sur ce troupeau et la probabilité que le test soit positif sur un animal de ce troupeau est de 0,058.

On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$?
2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif? On donnera la valeur exacte et la valeur approchée au millième.

Exercice 4214

Un concours sportif est organisé, chaque année, pour relier deux villages le plus rapidement possible. Plusieurs moyens de déplacement sont possibles :
à vélo ; en roller ; à pied.

On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres. L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\dfrac{2}{3}$.

Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent "*non cycliste*". Donner également la valeur approchée au millième de cette probabilité.

6. Loi binomiale avec calculatrice : valeurs cumulées :

Exercice 5407

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 0,2 et 20.

On répondra aux questions à l'aide de la calculatrice. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près :

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

2. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 9)$

Exercice 5426

On suppose qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre $n=22$ et $p=0{,}37$

A l'aide de la calculatrice et sans justification, donner la probabilité de $\mathcal{P}(3\leqslant\mathcal{X}\leqslant 7)$ arrondie à 10^{-4} près.

Exercice 5386

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre $n=5$ et $p=0{,}6$.

On arrondira les probabilités au millième près.

1. Donner la loi de la variable $\mathcal{X}$ sous la forme d'un tableau..
2. Déterminer les probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}>1)$

7. Loi binomiale - problème :

Exercice 4153

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites *(A, B et C)*, une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot "*BBAAC*" signifie que le candidat a répondu *B* qux première et deuxième questions, *A* aux troisième et quatrième questions et *C* à la cinquième question.

1. Combien y-a-t-il de mots-réponses possible à ce questionnaire?
2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

   Calculer la probabilité des évènements suivants :

   a. *E* : "*le candidat a exactement une réponse exacte.*".

   b. *F* : "*le candidat n'a aucune réponse exacte*".

   c. *G* : "*le mot-réponse du candidat est un palindrome*". *(On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, "BACAB" est un palindrome)*

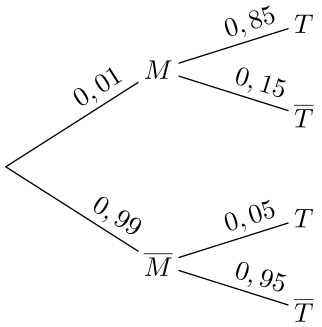
Exercice 5489

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux.

On note les évènements :

- *M* : "*l'animal est porteur de la maladie*" ;
- *T* : "*le test est positif*".

Voici l'arbre de probabilité obtenu après l'étude du cheptail :



1. Un animal est choisi au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif?
   b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

2. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$? Justifier.
   b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif? On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième près.

3. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subbissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

   a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ associant à un animal le coût à engager.
   b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager?

8. Espérance d'un loi binomiale :

Exercice 4168

On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

1. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire $\mathcal{X}$?
2. Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$.
3. Donner l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice 4215

Une usine produit des sacs. On suppose que la probabilité *(arrondie au centième)* qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement "*au moins un sac est défectueux*"? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Exercice 4197

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été, il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.

Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\dfrac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.

Une somme de 1 crédit *(la monnaie locale)* est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.

Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.

Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Evidemment si les 13 groupes inscrits se présent, le 13^{e} groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédit à l'association.

Les probabilités demandées seront arrondies au 100^{e} *le plus proche.*

1. Quelle est la probabilité P_{13} qu'un jour donné, il n'y ait pas de désistement, c'est à dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade?
2. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de

substitution.
Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.

3. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :

$$\left(\sum_{k=0}^{13} k\cdot\binom{13}{k}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}\right) - 2\cdot P_{13}$$

Calculer ce gain.

4. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association?

9. Répartition de la distribution :

Exercice 5427

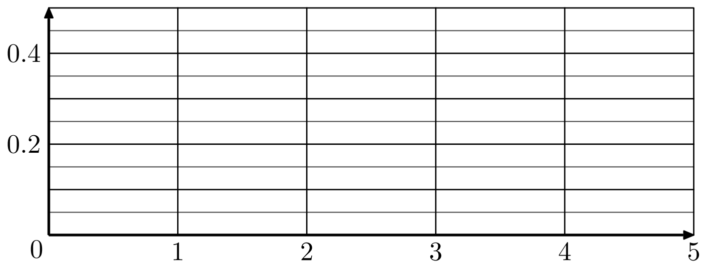
1. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,5$.

Dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

2. On considère la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,3$.

Dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.

3. Dans le repère ci-dessous, placer les points :
$\big(k\,;\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)\big)$ et $\big(k\,;\mathcal{P}(\mathcal{Y}=k)\big)$
pour k allant de 0 à 5.



10. Intervalle de confiance et de fluctuation :

Exercice 5435

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 9 et 0,3 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(9\,;0,3)$

Le tableau ci-dessous donne des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,04	0,196	0,463	0,73	0,901	0,975	0,996	1,0	1,0	1,0

Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;5]$.

Exercice 5434

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 9 et 0,5 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(9\,;0,5)$

Les deux tableau ci-dessous donne des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,002	0,02	0,09	0,254	0,5	0,746	0,91	0,98	0,998	1,0

1. Pour quelles valeurs de k a-t-on : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)>0,025$?

2. Pour quelles valeurs de k a-t-on : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)\geqslant 0,975$?

3. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[2\,;7]$.

Exercice 5436

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 30 et 0,32 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(30\,;0,32)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0	0	0,001	0,005	0,018	0,049	0,11	0,208	0,341

k	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,494	0,645	0,774	0,871	0,934	0,97	0,988	0,995	0,999

k	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

1. Déterminer les plus petits entiers a et b tels que :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0,025$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0,975$

2. Justifier que : $\mathcal{P}(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0,95$

3. En notant $F=\dfrac{\mathcal{X}}{30}$ la variable aléatoire qui représente la fréquence aléatoire du succés. Justifier que :
$\mathcal{P}\left(\dfrac{a}{30}\leqslant F\leqslant\dfrac{b}{30}\right) \geqslant 0,95$

Exercice 5446

Une société affirme que 80 % de ses clients sont satisfaits par ses produits.

1. Une association de consommateurs souhaite vérifier cette alégation et commande une étude portant sur 50 clients de cette société.
   a. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.
   b. L'étude obtient un taux de satisfaction de 71 %. Selon cette étude, que peut-on dire de l'affirmation de la société au seuil de 5 %?

2. L'association renouvelle son étude qui porte cette fois sur 100 clients. Cette nouvelle étude obtient toujours

un taux de satisfaction de 71 %.
Que peut-on dire de l'affirmation de la société au seuil de 5 %.

Exercice 5490

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 100 et 0,35 *($\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(100\,;0{,}35)$)*.

Les questions suivantes sont à traiter à l'aide de la calculatrice et les résultats doivent être donnés, si nécessaire, au millième près :

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=43)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 38)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 31)$

2. a. Déterminer la valeur des plus petits entiers a et b vérifiant les deux conditions suivantes :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}975$

   b. Donner l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence associée à la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

11. Anciennes annales (programme antérieur à 2011) :

Exercice 3127

Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules vertes *($0\leqslant n\leqslant 10$)*. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Le joueur tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évèements suivants :

   a. R: "*La boule tirée est rouge*" ;

   b. B : "*la boule tirée est blanche*" ;

   c. V : "*la boule tirée est verte*".

2. Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous.
   Le joueur tire une boule de l'urne :
   - Si elle est rouge, il gagne 16 F ;
   - Si elle est blanche, il perd 12 F ;
   - Si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
     - Si cette boule est rouge, il gagne 8 F ;
     - Si cette boule est blanche, il perd 2 F ;
     - Si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.

   Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants. Au début de la partie, le joueur possède 12 F. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie *(un tirage ou deux tirages selon le cas)*.

   a. Déterminer les valeurs prises par $\mathcal{X}$.

   b. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

   c. Montrer que l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ a pour valeur : $E(\mathcal{X})=12+16\cdot\dfrac{n}{(n+7)^2}$.

3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par $f(x)=\dfrac{x}{(x+7)^2}$. Etudier les variations de f.

4. En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique $\mathcal{X}$ est maximale. Calculer cette valeur maximale *(on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)*.

12. Loi géométrique tronquée :

Exercice 7422

On considère l'expérience aléatoire suivante qui consiste à lancer un dé 5 fois successivement *(et de manière indépendante)* et de noter le numéro de lancer où la face 6 est apparu la première fois.
Si la face 6 n'est pas apparu lors de ces 5 lancers alors on note 0.

1. Construire l'arbre de probabilité associé à cette expérience aléatoire.

2. On considère la variable aléatoire qui associe à chaque épreuve de l'expérience aléatoire associe le nombre noté.

   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

255. Exercices non-classés :

Exercice 7114

Les résultats approchés sont à arrondir au millième.

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.

On prélève au hasard 100 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.

On admet que la probabilité qu'une clé USB prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est égale à 0,015.
On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer les probabilités $p(\mathcal{X}=0)$ et $p(\mathcal{X}=1)$.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux clés soient défectueuses.

