

Première S/Polynômes du second degré

1. Etude des polynômes du second degré :

Exercice 2245

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont l'image d'un nombre x est définie par la relation algébrique :

$$f(x) = 4x^2 + 4x - 3$$

1. a. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = (2x - 1)(2x + 3)$$

- b. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = (2x + 1)^2 - 4$$

2. Pour chacune des questions suivantes, utiliser la forme la plus adaptée :

- a. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f .
b. Sachant que le carré d'un nombre est toujours positif ou nul, établir que la fonction f est minorée par -4 .
c. Déterminer le signe de la fonction f sur \mathbb{R} .
d. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geq 5$.

Exercice 2249

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = 6x^2 - 9x - 6$$

1. a. Montrer que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = 6 \left[\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{25}{16} \right]$$

- b. En déduire que la fonction f est minorée par $-\frac{75}{8}$.
c. Soit a et b deux nombres réels, établir l'implication

suivante :

$$a < b < \frac{3}{4} \implies f(a) > f(b)$$

(Cette implication établit que, sur $]-\infty; \frac{3}{4}]$, la fonction f est décroissante.)

2. a. Déduire de la question 1. a. la factorisation suivante :

$$f(x) = 6 \left(x + \frac{1}{2} \right) (x - 2)$$

- b. Donner les antécédents de 0 par la fonction f .
c. Déterminer la partie de \mathbb{R} sur laquelle la fonction f est strictement positive.

Exercice 2247

1. On considère l'expression P définie par :

$$P = \left(x - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

- a. Donner la forme développée et réduite de l'expression P .
b. Résoudre l'équation $P = 0$.

2. Soit la fonction f dont l'image de x est définie par :
- $$f(x) = x^2 - 2x - 2$$

- a. Déterminer les valeurs des deux réels α et β vérifiant l'égalité suivante :
$$f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$$

b. Déterminer la forme factorisée de la fonction f .
c. Déduire de la question précédente, les antécédents de 0 par la fonction f .

2. Forme canonique :

Exercice 2259

Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

- a. $2x^2 + 8x - 6$ b. $3x^2 + 3x + 6$
c. $9x^2 + 18x + 27$ d. $5x^2 + 10x + 2$
e. $2x^2 + 5x - 4$ f. $\sqrt{2}x^2 - 3x + 1$

Exercice 2296

On définit la fonction f sur \mathbb{R} dont l'image de $x \in \mathbb{R}$ est définie par la relation :

$$f(x) = 8x^2 - 2x + 1$$

1. Donner la forme canonique de la fonction f .
2. Etablir que la fonction f est minorée par $\frac{7}{8}$.
3. a. Etablir, sans justification, le tableau de variation de la fonction f .
b. En déduire que la fonction f n'admet pas de zéro sur \mathbb{R} .

3. Equation du second degré :

Exercice 2253



Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| a. $x^2 + 4x - 5 = 0$ | b. $2x^2 - 13x + 15 = 0$ |
| c. $x^2 + x + 1 = 0$ | d. $x^2 + 5x + 2 = 0$ |
| e. $-3x^2 + 6x - 2 = 0$ | f. $3x^2 - 2x + 1 = 0$ |

Exercice 770



Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|---------------------------------|--------------------------|
| a. $3x^2 - 5x + 6 = 0$ | b. $3x^2 - 24x + 48 = 0$ |
| c. $x(x-2)(x+1) = (x-2)(-7-3x)$ | |

Exercice 5710



Déterminer les racines, sous forme simplifiée, des polynômes suivants :

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a. $2x^2 - 3x - 9$ | b. $5x^2 - 8x + 5$ |
| c. $2x^2 - 8x + 8$ | d. $x^2 + 2x - 1$ |

4. Factorisations et simplifications :

Exercice 2527



Factoriser les expressions suivantes :

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a. $5x^2 - x - 4$ | b. $-2x^2 - 3x - 1$ |
| c. $-x^2 + 2x - 1$ | d. $4x^2 + x - 3$ |
| e. $4x^2 + 4x - 5$ | f. $x^2 - 2x - 4$ |

Exercice 5711



1. Factoriser les expressions suivantes :

- | | |
|--------------------|----------------------|
| a. $2x^2 - 3x - 2$ | b. $12x^2 - 12x + 3$ |
|--------------------|----------------------|

5. D'autres équations :

Exercice 2255



On considère la fonction polynôme P de degré 3 définie par :

$$P(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$$

1. Déterminer les valeurs de a , b , c tel que :

$$P(x) = (x+2)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$$

2. En déduire l'ensemble des zéros du polynôme P .

Exercice 6793

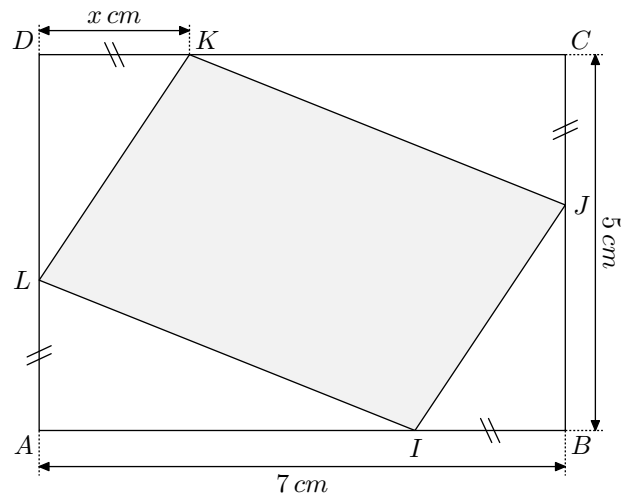


6. Tableau de signes et inéquation :

Exercice 5706



On considère la figure ci-dessous :



Quel doit-être la valeur de x pour que la figure grisée ait une aire de 25 cm^2 ?

2. Simplifier la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$$

Exercice 2528



Simplifiez l'expression des fractions rationnelles ci-dessous :

- | | |
|---|-------------------------------|
| a. $\frac{3x-1}{3x^2+2x-1}$ | b. $\frac{6x^2-5x+1}{1-4x^2}$ |
| c. $\frac{3x^2-6x-6}{x^2-(\sqrt{3}+2)x+(\sqrt{3}+1)}$ | |

1. Déterminer les racines du polynôme :

$$(P) : x^2 - 8x + 4$$

2. Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$a = (1 + \sqrt{3})^2 ; \quad b = (1 - \sqrt{3})^2$$

3. On considère le polynôme (P') défini par :

$$(P') : x^4 - 8x^2 + 4$$

- | |
|--|
| a. Montrer que $1 + \sqrt{3}$ est une racine de (P') . |
| b. En déduire les quatre racines du polynôme (P') . |

Exercice 2277

Etablir le tableau de signes des polynômes du second degré suivant :

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| a. $x^2 + 3x + 4$ | b. $-8x^2 + 32x + 32$ |
| c. $4x^2 + 3x - 10$ | d. $-5x^2 - 3x - 1$ |
| e. $4x^2 - 16x + 16$ | f. $2x^2 + 11x + 5$ |

Exercice 2965

- Etablir que le polynôme $P(x) = 2x^2 - x + 1$ est strictement positif sur \mathbb{R} .
 - En déduire le signe du polynôme :

$$Q(x) = (2x^2 - x + 1)^2 + 3 \cdot (2x^2 - x + 1) + 1$$
- Justifier que l'équation ci-dessous n'admet aucune solu-

Exercice 1158

tion :

$$4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 5 = 0$$

On considère le polynôme du troisième degré :

$$\mathcal{P} = 3x^3 + 5x^2 - 5x + 1$$

On sait que le polynôme \mathcal{P} admet une factorisation de la forme :

$$\mathcal{P} = (3x - 1)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$$

- Déterminer les valeurs de a, b, c vérifiant cette factorisation.
- En déduire l'ensemble des racines du polynôme \mathcal{P} .
- Dresser le tableau de signe de \mathcal{P} .

7. Tableau de signes et positions relatives :**Exercice 2279**

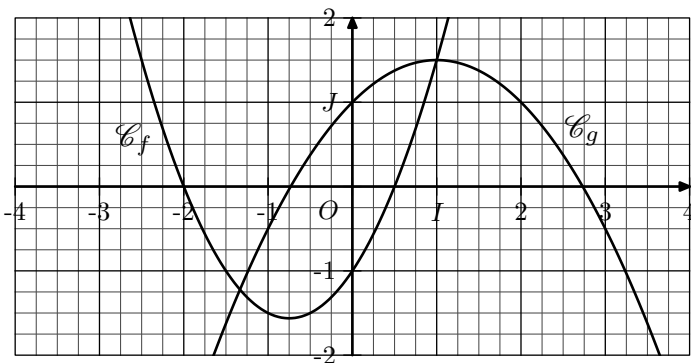
On considère la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2 - x - 10$ et la droite \mathcal{D} d'équation $y = 2x - 1$.

- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{D} et \mathcal{P} .
- Donner les valeurs de x pour lesquelles le point d'abscisse de \mathcal{P} se trouve au dessus du point, de même abscisse, de \mathcal{D} .

Exercice 2973

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \quad ; \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$$



On répondra algébriquement aux questions ci-dessous :

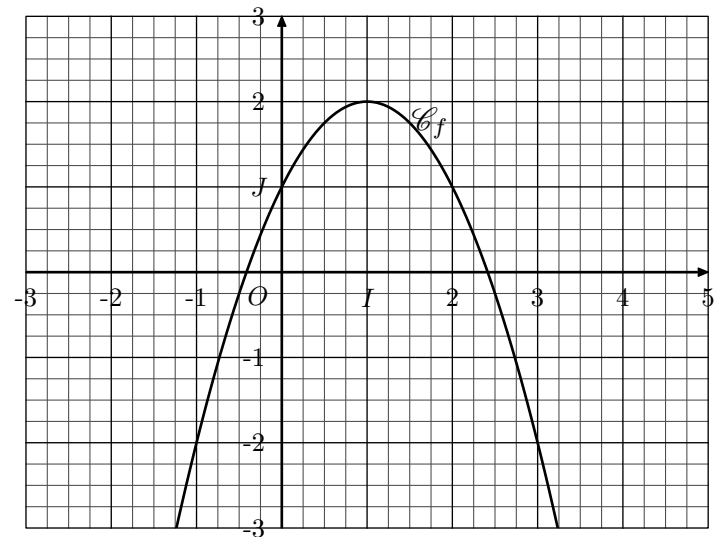
- Déterminer les zéros des fonctions f et g .
- Déterminer, algébriquement, la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 5742

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

Ci-dessous est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé :



- Déterminer les zéros de la fonction f .
- On considère la fonction affine g définie par la relation :

$$g(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$
 - Tracer dans le repère ci-dessous la droite (d) représentative de la fonction g .
 - Algébriquement, étudier les positions relatives des courbes \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_f .

8. Tableau de signes et expressions rationnelles :**Exercice 2298**

Résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|--|--|
| a. $2x^2 - 8x + 2 \geq 0$ | b. $\frac{3x^2 - 5x + 2}{-3x^2 + 4x - 2} \leq 0$ |
| c. $\frac{2x - 5}{2x - 1} < \frac{x + 1}{x + 3}$ | |

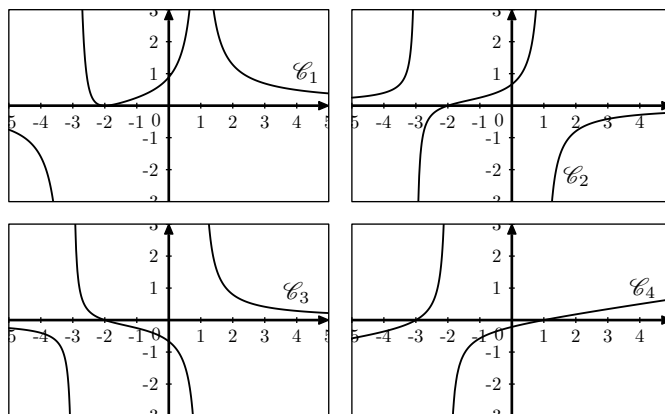
Exercice 2747Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation :

$$\frac{-3x^2 + 4x + 4}{5x^2 + x - 4} \geq 0$$

Exercice 5743On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 2x - 3}$$

- Résoudre l'inéquation : $f(x) \geq 0$
- Parmi les quatre courbes ci-dessous, une seule est la courbe représentative de la fonction f . Laquelle ?

**Exercice 6632**On considère les deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et \mathbb{R} par les relations :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 3}{x + 1} ; \quad g(x) = x - 2$$

Résoudre l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$ **9. Tableau de variations :****Exercice 2276**On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} définies par les relations :

$$f(x) = x^2 + x + 1 ; \quad g(x) = -2x^2 - 3x + 5$$

- Etablir le tableau de variation de chacune de ces fonctions.
- Etablir le tableau de signe de chacune de ces fonctions.

Exercice 2718On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 1}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Exercice 5056On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :**10. Equation et ensemble de résolution :****Exercice 2735**

On considère l'équation suivante :

$$\frac{1}{2x^2 - 3x + 1} - \frac{1}{2x^2 + 5x + 2} = 0$$

- Déterminer l'ensemble de résolution de cette équation.
- Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.


Exercice 2733

Résoudre les équations suivantes en tenant garde à l'ensemble de résolution de chaque équation :

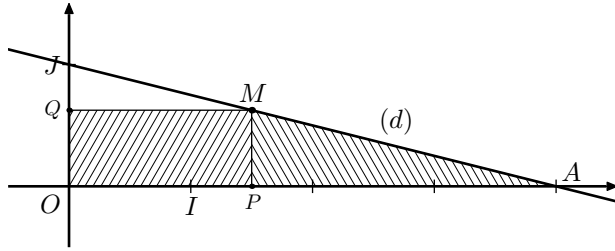
a. $\sqrt{3x^2 - 2x - 3} = \sqrt{x}$

b. $\frac{1}{3x^2 - 8x + 4} = \frac{-2}{5x^2 - 6x - 8}$

11. Problèmes :

Exercice 6691 

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la droite (d) passant par les points $A(4; 0)$ et J .

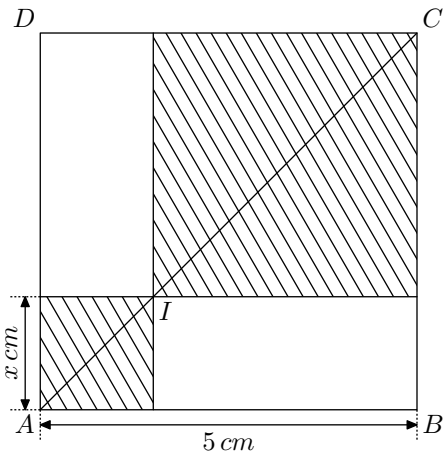


On considère un point M appartenant à la droite (d) et d'abscisse x tel que $x \in]0; 4[$.

Déterminer la position du point M sur la droite (d) telle que le rectangle $OPMQ$ et le triangle MPA aient la même aire.

Toute trace de recherche et de prise d'initiatives seront prises en compte au cours de l'évaluation.

Exercice 2955  



On considère un carré $ABCD$ de 5 centimètres de côté; un point I appartient à la diagonale $[AC]$, il est repéré comme l'indique la figure ci-dessous par la longueur x :

A partir de ce point I , on construit deux carrés de diagonale respectives $[AI]$ et $[IC]$.

Déterminer la valeur de x pour laquelle la somme des aires de ces deux carrés vaut les $\frac{3}{4}$ de l'aire du carré $ABCD$.

Exercice 5972 

Dans cet exercice, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

12. Un peu plus loin :

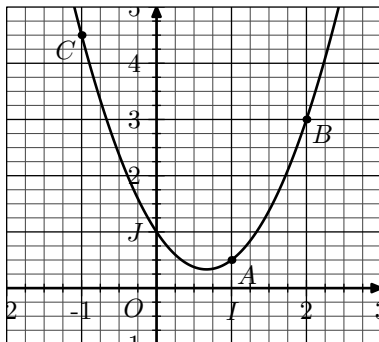
Exercice 205  

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

où a , b et c sont des nombres réels fixés mais inconnus pour l'instant.

On considère la représentation de la fonction f dans le repère orthogonal $(O; I; J)$ ci-dessous :

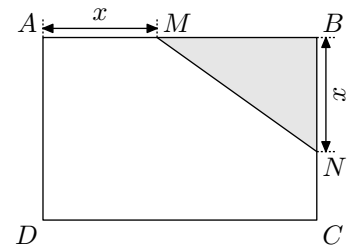


1. Montrer que les nombres a , b , c doivent vérifier le système

On considère un rectangle $ABCD$ dont les dimensions sont données ci-dessous :

$$AB = 6 \text{ m} ; AD = 4 \text{ m}.$$

Pour un nombre réel x compris entre 0 et 4, on place les points M et N respectivement sur les



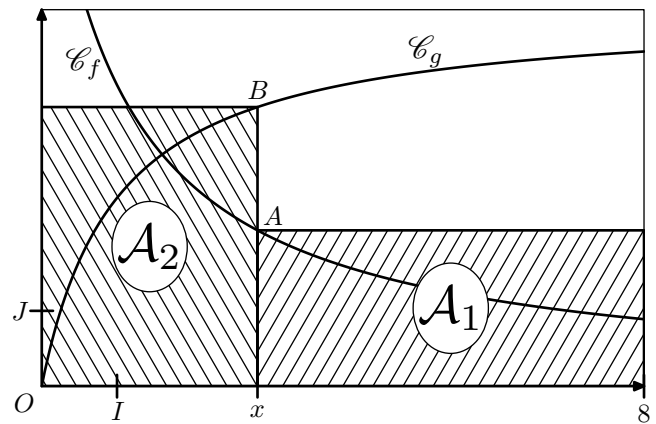
côtés $[AB]$ et $[BC]$ tels que : $AM = x$; $BN = x$

Déterminer la ou les valeurs possibles de x pour que l'aire du triangle MBN soit égales à $\frac{1}{6}$ de l'aire totale du rectangle $ABCD$.

Exercice 2956 

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère la représentation des deux fonctions f et g dont l'image de x est défini par :

$$f(x) = \frac{8}{x+1} ; g(x) = \frac{-6}{x+1} + 6$$



Le nombre x appartient à l'intervalle $[0; 8]$. On considère les points A et B d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Parallèlement aux axes, on construit deux rectangles représentés ci-dessus; on note \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 chacune de leurs aires.

1. Déterminer l'expression des aires \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 en fonction de la valeur de x .
2. Déterminer pour quelles valeurs de x , on a : $\mathcal{A}_2 \geq \mathcal{A}_1$

d'équation suivante :

$$\begin{cases} a - b + c = \frac{9}{2} \\ a + b + c = \frac{1}{2} \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$$

2. Résoudre le système précédent et en déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 2297  

1. **Etude théorique :**

On admet que pour un trinôme $ax^2 + bx + c$ du second degré dont le discriminant Δ est strictement positif, ces deux racines s'expriment sous la forme :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Montrer que la somme des racines vaut $-\frac{b}{a}$.
- Montrer que le produit des racines vaut $\frac{c}{a}$.

2. Application :

En utilisant les propriétés établies à la question précédente, répondre aux questions suivantes :

- On considère le polynôme $2x^2 + 4x - 16$. Après avoir trouvé une racine évidente de ce polynôme, déterminer la valeur de l'autre racine.
- Déterminer le trinôme du second degré admettant deux racines dont le produit des racines vaut 9 et la somme des racines vaut -6 .

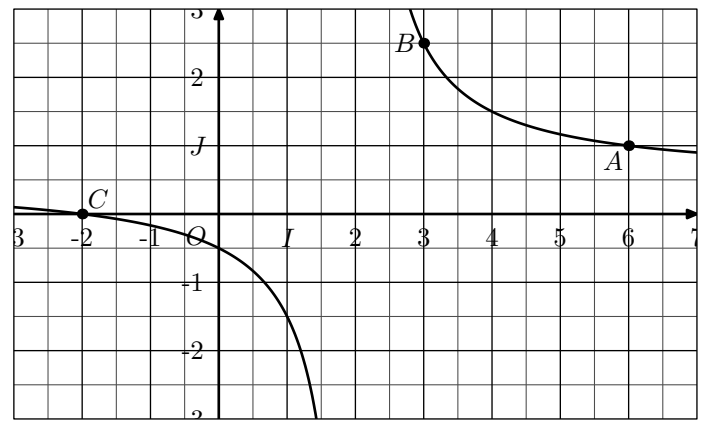
Exercice 2708



On représente ci-dessous la courbe représentative de la fonction f , dans le repère orthonormé $(O; I; J)$ dont l'expression de $f(x)$ s'exprime sous la forme :

$$f(x) = \frac{a \cdot x + b}{2 \cdot x + c}$$

où a, b, c, d sont des nombres réels fixés.



Les points A, B, C de la courbe \mathcal{C}_f appartiennent également au quadrillage.

Déterminer l'équation complète de cette courbe.

Exercice 2924



Le but de cet exercice est de démontrer que les seuls polynômes périodiques sont les polynômes constants.

On utilisera la proposition suivante :

Tout polynôme réel de degré n admet au maximum n racines réelles.

Notons a un nombre réel non-nul et P un polynôme périodique de période a :

- On note Q le polynôme définie par :

$$Q(x) = P(x) - P(a)$$
 Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $Q(n \cdot a) = 0$
- En conclure que le polynôme P est constant.

13. Un peu plus loin : changement de variables :

Exercice 6877



Résoudre les deux équations suivantes en utilisant le changement de variable :

- $x^4 - 5 \cdot x + 4$
- $x^4 + 5 \cdot x + 4$

Exercice 2971



On considère l'expression (E) défini par :

$$(E) : x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$$

- Montrer que si a est solution de l'équation (E) alors $\frac{1}{a}$ l'est aussi.
 - Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation :

$$(E') : x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
- Développer l'expression suivante :

$$\left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \left(x + \frac{1}{x} - 2\right)$$
 - En utilisant le changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$, mo-

difier l'équation (E') en une équation du second degré en X .

- Résoudre l'équation en X obtenu à la question précédente.
 - En déduire les valeurs de x solution de (E') .
- Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

Exercice 5143



On considère l'équation (E) définie par :

$$x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 8x + 1 = 0$$

- Montrer que l'équation (E) est équivalente à :

$$(E') : x^2 - 8x + 2 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
- Déterminer les réels a, b et c vérifiant la relation :

$$x^2 - 8x + 2 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = a \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + b \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + c$$
- En posant pour changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$, résoudre l'équation (E') .

14. Un peu plus loin : systèmes d'équations du second degrés :

Exercice 2715

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x \cdot y = -1 \\ (x-2)(2y+3) = 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que le couple $\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$ est solution de ce système
2. Justifier que les abscisses des solutions de ce système forment l'ensemble des solutions de l'équation suivante sur \mathbb{R}^* : $3x^2 - 8x + 4$
3. En déduire l'ensemble des solutions de ce système.

Exercice 2748

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x \cdot y = -2 \end{cases}$$

Exercice 1393

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 \\ x \cdot y = 1 \end{cases}$$

255. Exercices non-classés :

Exercice 5821

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f(x) = \frac{2}{x - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}}$$

1. a. Résoudre l'inéquation : $-x^2 + 6x - 8 \geq 0$.

Indication : Ce système possède quatre couples de solutions.

Exercice 2003

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -5x^2 + 4y^2 = -1 \\ x \cdot y = 1 \end{cases}$$

Indication : ce système admet deux couples comme solutions.

Exercice 2004

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -2x^2 - 2y^2 = -4 \\ x \cdot y = -1 \end{cases}$$

Indication : ce système admet deux couples pour solutions

Exercice 2005

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = -3 \\ x \cdot y = 1 \end{cases}$$

Indication : ce système n'admet aucun couple comme solution.

- b. Démontrer que l'équation suivante n'admet aucune solution : $x = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$
 - c. Donner l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de la fonction f
2. Démontrer que la fonction f est positive sur son ensemble de définition.