1S_DERIVATION

Exercice 1*

Exprimer chacune des expressions algébriques ci-dessous sous la forme d'un quotient où leur numérateur et leur dénominateur sont des produits de facteurs du premier degré :

a. $\dfrac{3x}{x+2}+\dfrac{x+2}{1-x}$ b. $\dfrac{x^2+x+3}{x+1}-\dfrac{x^2+4x}{x+2}$

Exercice 2

Etablir les égalités suivantes :

a. $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{3-x^2}{x^2-1}$

b. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2+4x+1}{x\cdot\left(x+1\right)^2}$

c. $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{2x-1}}{x}=\dfrac{4x+1}{x\cdot(x+1)\cdot(2x-1)}$

Exercice 3

1. Soit f la fonction définie par la relation :
   $f(x)=x^2-3\cdot x+2$

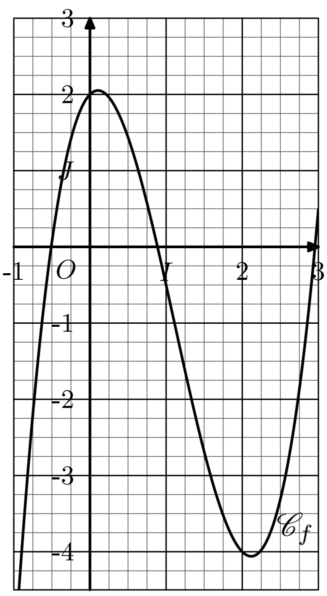
   Déterminer, pour $h\in\mathbb{R}$, un expression simplifiée de $f(1+h)$.

2. Soit g la fonction définie par la relation :
   $$g(x)=\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$$
   Etablir , pour tout $h\in\mathbb{R}^*$, l'égalité :
   $$g(h+5)=\frac{2}{\sqrt{2h+9}+3}$$

Exercice 4

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé ci-contre est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.

On considère les points A, B, C de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 0, 1 et 2



1. Placer les points A, B et C et par lecture graphique, donner leur coordonnée.

2. Calculer le taux de variation de la fonction f :

   a. entre 0 et 2

   b. entre 1 et 2

Exercice 5

Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0} h-2$ b. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{2h^2+h}{h}$

c. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{5h^3+2h^2}{h}$ d. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{h+1}{h+2}$

e. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{2h^2+h}{3h}$ f. $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{h^3+2h^2}{2h}$

Exercice 6

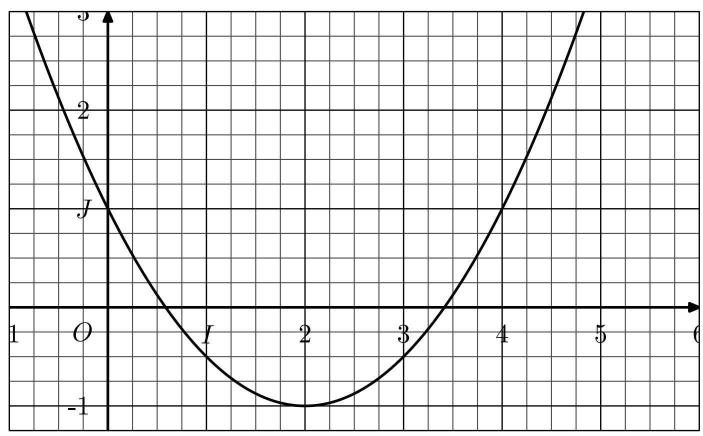
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f\colon x\longmapsto \dfrac{1}{2}\cdot x^2-2\cdot x+1$

1. a. Montrer que, pour tout $h\in\mathbb{R}$, on a :
   $f(4+h)-f(4)=\dfrac{1}{2}\cdot h^2+2\cdot h$

   b. Déterminer la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$

2. Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



   a. Tracer dans le repère ci-dessous, la droite (d) admettant pour équation réduite : $y=2x-7$

   b. Justifier que la droite (d) est une tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ dont on précisera le point de contact.

Exercice 7

1. Le nombre dérivé de la fonction carré en 2 :

   a. Pour $x\neq 2$, établir l'égalité suivante : $\dfrac{x^2-2^2}{x-2}=x+2$

   b. Soit f la fonction carrée.
   En déduire la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

2. Le nombre dérivée de la fonction inverse en 3 :

   a. Pour $x\neq 3$, éetablir l'égalité suivante : $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=-\dfrac{1}{3x}$

   b. Soit g la fonction inverse.
   En déduire la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

3. Le nombre dérivée de la fonction racine carrée en 3 :

   a. Pour $x\neq 2$, établir que : $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$

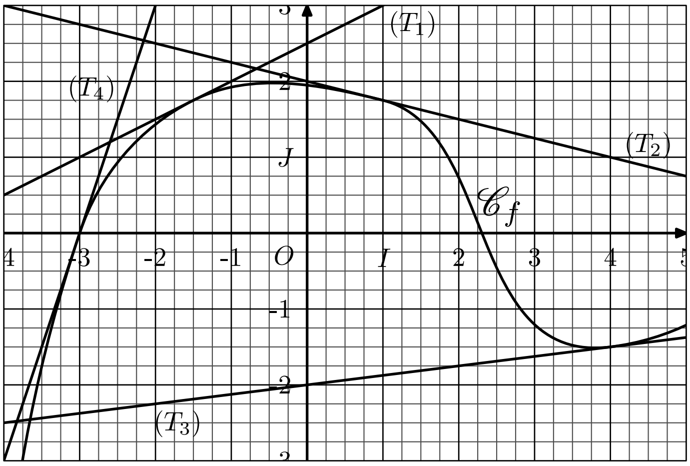
   b. Soit h la fonction racine carrée.

 BY-NC

En déduire la valeur de la limite : $\lim_{x\mapsto 2} \dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}$

Exercice 8

Ci-dessous est représentée, dans le repère $(O\,;I\,;J)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et quatre de ses tangentes :



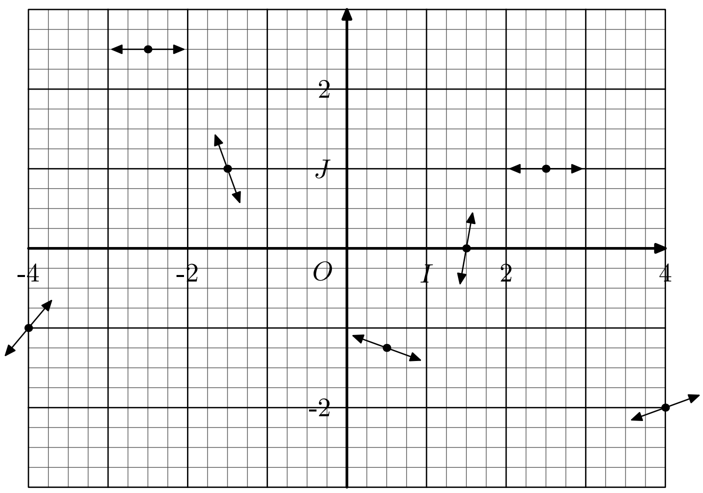
1. La droite (T_1) s'appelle :

   "*La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1{,}5$*"

   Nommez de même les trois autres droites.
2. Déterminer l'équation réduite de chacune de ces quatres tangentes.

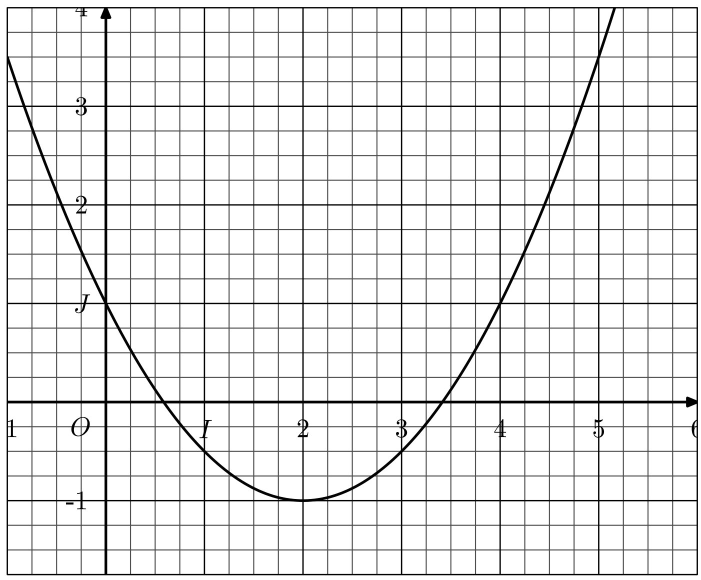
Exercice 9

Tracer la courbe représentative d'une fonction passant par tous les points indiquées et respectant en chacun d'eux la tangente représentée :



Exercice 10

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction dans un repère $\big(0\,;I\,;J\big)$:



1. a. Tracer la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.

   b. Donner le coefficient directeur de la droite (d).
2. a. Tracer la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

   b. Donner le coefficient directeur de la droite (Δ).

Exercice 11

Déterminer les fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

a. $f: x \longmapsto x-2\sqrt{x}$ b. $g: x\longmapsto 2\times\dfrac{1}{x}$

c. $h: x\longmapsto \dfrac{-5}{x}+\sqrt{x}$ d. $k: x\longmapsto x^2-\dfrac{1}{x}$

Exercice 12

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f: x\longmapsto x-\dfrac{1}{x}$
2. $g: x\longmapsto 2\cdot\sqrt{x}$
3. $h: x\longmapsto \dfrac{3}{x}-2\sqrt{x}$
4. $j: x\longmapsto 2x^3+\dfrac{2}{x}$

On présentera l'expression des dérivées sous la forme d'un quotient.

Exercice 13

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x)=3x^2$ b. $g(x)=\dfrac{1}{12}x^6$ c. $h(x)=4\sqrt{x}$

d. $j(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ e. $k(x)=\dfrac{1}{2x}$ f. $l(x)=-\dfrac{2}{x}$

Exercice 14*

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a. $f: x\longmapsto 3x^2+5x$ b. $g: x\longmapsto \dfrac{3}{x}+2\sqrt{x}$

c. $h: x\longmapsto 5x^3-\dfrac{3}{x}$ d. $j: x\longmapsto \dfrac{8x^3-2x^2}{x}$

Les dérivées des fonctions g et h seront présentées sous forme de quotient.

 BY-NC

Exercice 15

On souhaite déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes :

$f : x \longmapsto (3x^2+3x)(2x+2)$; $g : x \longmapsto (2x^2+1)\sqrt{x}$

$h : x \longmapsto \dfrac{1}{x}\cdot(3-x^2)$; $j : x \longmapsto \dfrac{2}{x}\cdot\sqrt{x}$

1. L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $u\cdot v$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier les deux facteurs de ce produit et leur dérivée respective.

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				
$j(x)$				

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit :
$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$
Etablir que ces fonctions admettent pour dérivée les fonctions ci-dessous :

$f' : x \longmapsto 18x^2+24x+6$; $g' : x \longmapsto \dfrac{10x^2+1}{2\sqrt{x}}$

$h' : x \longmapsto \dfrac{-x^2-3}{x^2}$; $j' : x \longmapsto -\dfrac{1}{x\cdot\sqrt{x}}$

Exercice 16*

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto (2x^2-1)(4x-1)$ b. $g : x \mapsto (5x^4-x+1)(3-2x^2)$

c. $h : x \longmapsto (3-x)\cdot\dfrac{1}{x}$ d. $j : x \longmapsto (x^2-3)\cdot\sqrt{x}$

Exercice 17

On souhaite déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes :

$f : x \longmapsto \dfrac{3-2x}{x+1}$; $g : x \longmapsto \dfrac{x^2+4x-1}{2x-1}$

$h : x \longmapsto \dfrac{3}{2-x}$; $j : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

1. L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $\dfrac{u}{v}$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier le numérateur et le dénominateur de ce quotient et leurs dérivées respectives.

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				
$j(x)$				

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit :
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$
Etablir que ces fonctions admettent pour dérivée les fonctions ci-dessous :

$f' : x \longmapsto -\dfrac{5}{(x+1)^2}$; $g' : x \longmapsto \dfrac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2}$

$h' : x \longmapsto \dfrac{3}{(x-2)^2}$; $j' : x \longmapsto \dfrac{1-x}{2(x+1)^2\cdot\sqrt{x}}$

Exercice 18

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f : x \longmapsto \dfrac{2-2x}{5x+1}$ b. $g : x \longmapsto (3x-2)(2x^2+1)$

c. $h : x \longmapsto \dfrac{1}{3x+1}$ d. $j : x \longmapsto (2x^2+3x)\cdot\sqrt{x}$

Exercice 19*

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

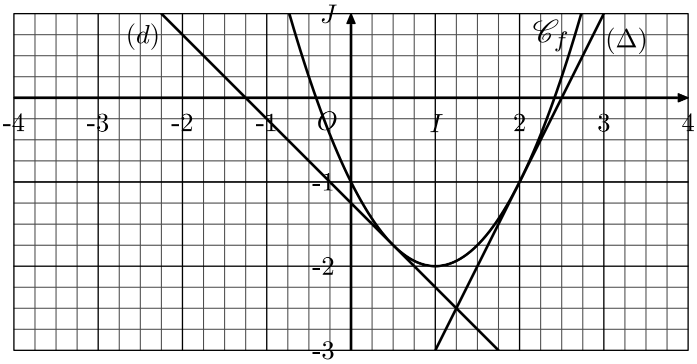
a. $f(x) = \dfrac{x+1}{3x+1}$ b. $g(x) = \dfrac{5x+1}{3-2x}$

c. $h(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{2x+1}$ d. $j(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

Exercice 20*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = x^2 - 2\cdot x - 1$

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal. On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.



On note respectivement (d) et (Δ) les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ et 2.

1. Déterminer les coordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant respectivement $\dfrac{1}{2}$ et 2 pour abscisse.

2. Graphiquement :

   a. Déterminer les coefficients directeurs des droites (d) et (Δ).

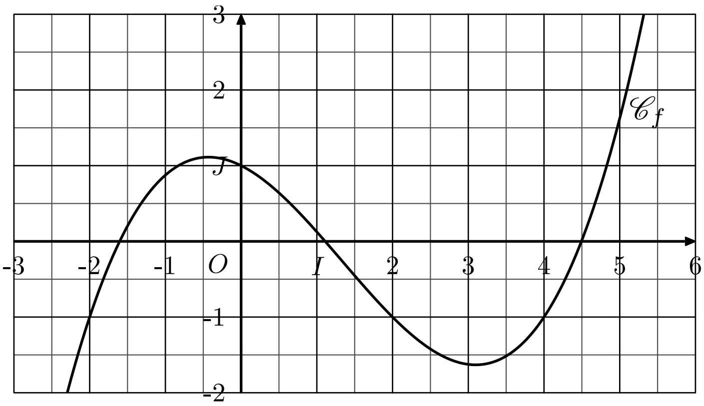
   b. Déterminer les équations réduites des droites (d) et (Δ).

Exercice 21

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

 BY-NC



On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Donner l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. On considère la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
   a. Donner la valeur du coefficient directeur de (T).
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T).
   c. Dans le repère ci-dessous, tracer la tangente (T).
3. On considère la droite (d) admettant l'équation réduite :
   $(d) : \; y = -x+1$
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (d) et de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice 22

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $\quad f(x)=4x^2-4x-3$

1. Calculer le nombre dérivé de la fonction f en 2.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice 23

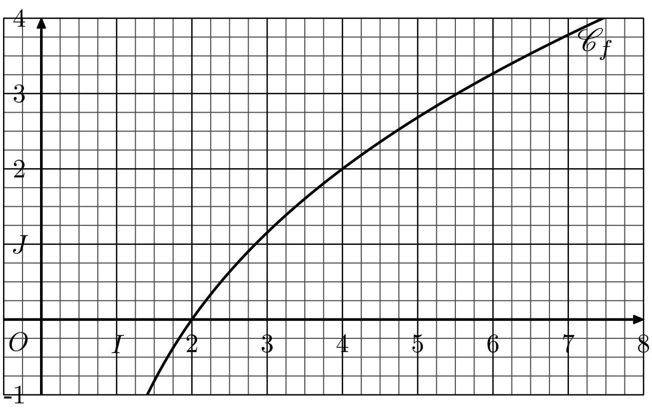
1. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction carrée au point d'abscisse -2.
2. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction inverse au point d'abscisse 3.

Exercice 24*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{x}}$$

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



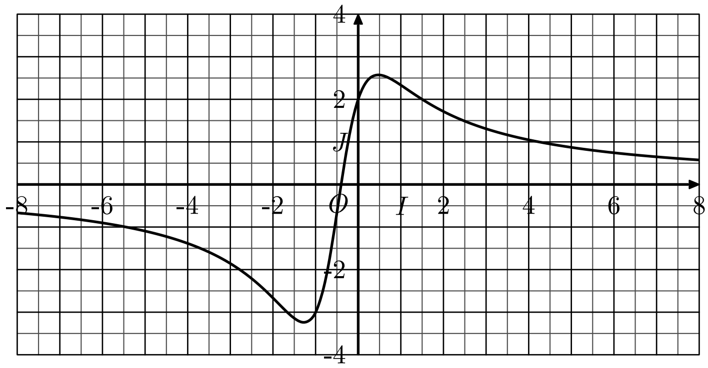
1. Montrer que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
   $$f'(x) = \frac{x+2}{x\cdot\sqrt{x}}$$
2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.
   b. Tracer la tangente (T).

Exercice 25*

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{5x+2}{x^2+x+1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f donnée ci-dessous :



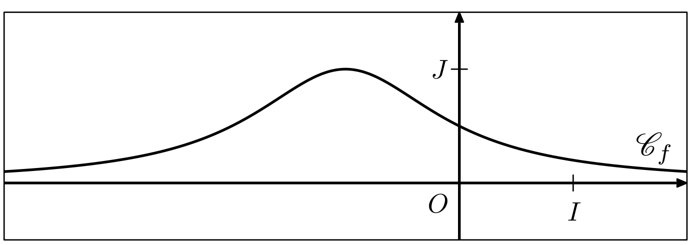
1. Donner l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. a. Justifier que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :
   $$f'(x) = \frac{-5x^2-4x+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$
   b. Etablir le tableau de signe de la fonction f'.
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
   (on indiquera les valeurs des extrémums arrondies au dixième près)
3. a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   b. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.
   c. Algébriquement, étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (T).

Exercice 26

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2\cdot x+2}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ orthonormé ci-dessous :



Soit (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

 BY-NC

1. Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ).
2. Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (Δ).

Exercice 27

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c \qquad \text{où } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b,c \in \mathbb{R}.$$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

1. Déterminer le coefficient directeur de la droite reliant les points de la courbe A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 3.
2. a. Déterminer le nombre dérivée de la fonction f pour $x=2$.
   b. Quelle conclusion apportez ?

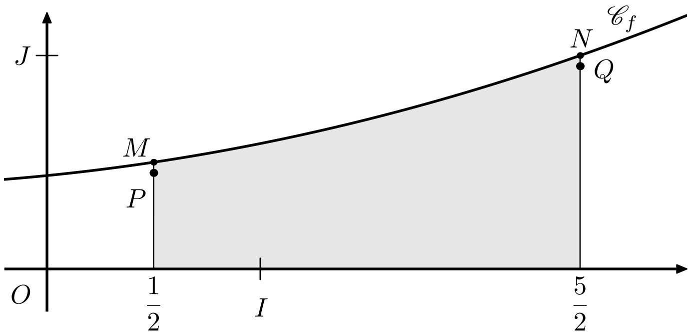
Exercice 28

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{20}{\cdot}x^2 + \frac{1}{10}{\cdot}x + \frac{7}{16}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$

On souhaite encadrer l'aire du domaine du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses ainsi qu'entre les deux droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=\frac{5}{2}$.



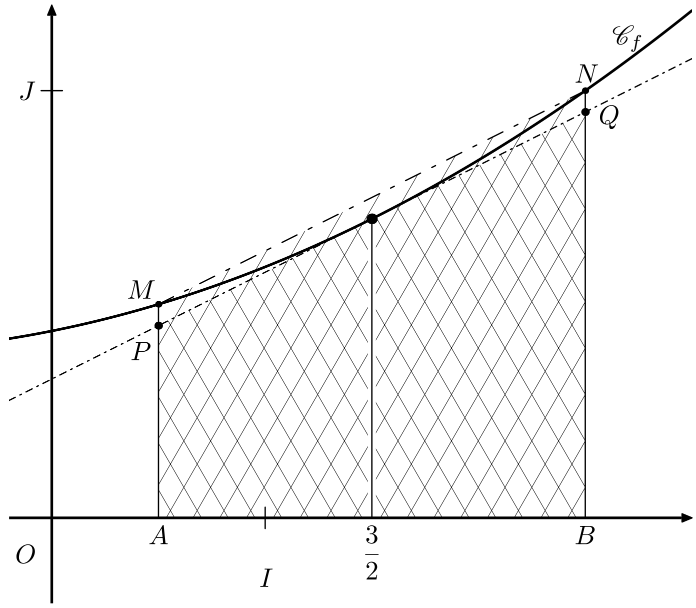
Pour cela, on va mesurer deux surface construites sous forme de trapèze :

- La première surface est formée à partir de la corde $[MN]$ à la courbe $\mathscr{C}_f$: son aire majore l'aire recherchée ;
- La seconde surface sera construite en considérant la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$: son aire minore l'aire recherchée.

On note :

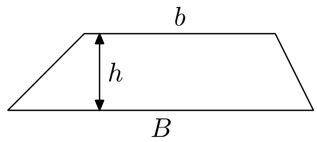
- A et B les points de l'axe des abscisses ayant pour abscisses respectives $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$.
- M et N les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ admettant respectivement pour abscisses $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$.
- P et Q les points de la droite (Δ) d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$

La figure ci-dessous illustre, dans un repère orthogonal pour accentuer la différence de ces deux surfaces, les deux aires à calculer :



On rappelle la formule du calcul de l'aire d'un trapèze :

$$\frac{(B+b)\times h}{2}$$



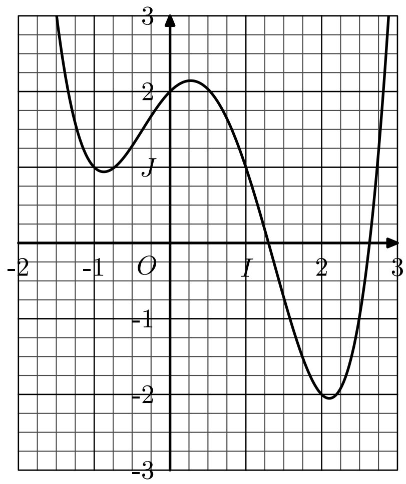
1. a. Déterminer les coordonnées des points M et N.
   b. En déduire l'aire du trapèze $ABNM$.
2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (Δ).
   b. Déterminer les coordonnées des points P et Q.
   c. En déduire l'aire du trapèze $ABQP$
3. a. En déduire un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$.
   b. Quel est l'amplitude de cet encadrement.

Exercice 29*

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}{\cdot}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}{\cdot}x^2 + x + 2$$

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal dans lequel est représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. a. Tracer la droite (d) d'équation : $y=-x$.
   b. Effectuer une conjecture sur les coordonnées en lesquels la droite (d) est une tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Etablir vos conjectures de la question 1. b..

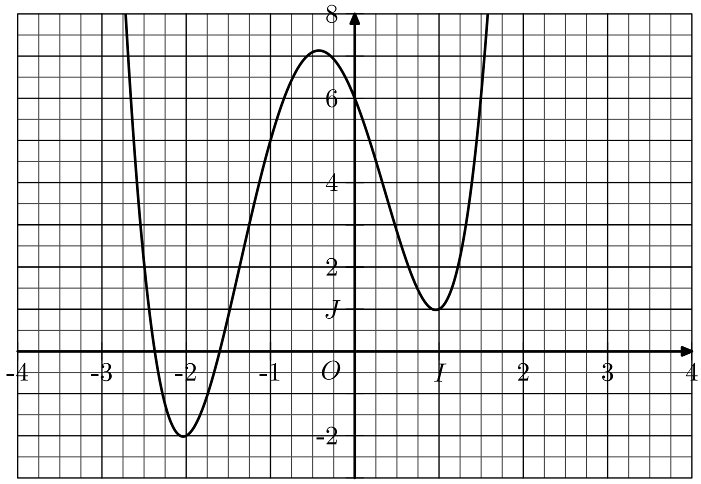
Exercice 30

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f : x \longmapsto \frac{3}{2}{\cdot}x^4 + 3{\cdot}x^3 - \frac{9}{2}{\cdot}x^2 - 5{\cdot}x + 6$$

 BY-NC

On donne, ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$:



La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de cette fonction admet une droite (d) de coefficient directeur 1 comme tangente en deux points.

Déterminer l'équation de cette droite et les coordonnées de ces deux points.

Toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

 BY-NC