CHAPITRE

6 Intégration

Sommaire

Partie A (s8)

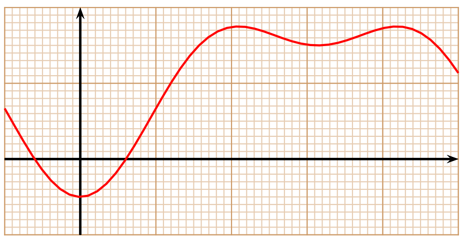
Les calculs d'aire de figures géométriques simples comme les rectangles, les polygones et les cercles sont décrits dans les plus anciens documents mathématiques connus. La première réelle avancée au-delà de ce niveau élémentaire a été faite par **Archimède**. *Grâce à sa technique, on pouvait calculer des aires bornées par des paraboles et des spirales.*

Au début du XVIII^e siècle, plusieurs mathématiciens ont cherché à calculer de telles aires de manière plus simple à l'aide de limites. Cependant, ces méthodes manquaient de généralité. La découverte majeure de la résolution du problème d'aire fut faite indépendamment par Newton et Leibniz lorsqu'ils s'aperçurent que l'aire sous une courbe pouvait être obtenue en inversant le processus de différentiation. Cette découverte, qui marqua le vrai début de l'analyse, fut répandue par **Newton** *en 1669 et Indépendamment par* **Leibniz** *aux environs de 1673.*

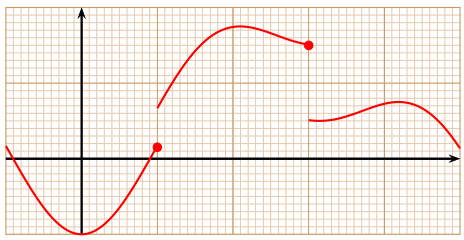
Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère orthonormal (O, I, J).

1 Intégrale d'une fonction

Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite continue sur I si on peut tracer sa courbe représentative dans un repère d'un trait continu sans lever le crayon.



fonction continue



fonction discontinue

1.1 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition 1.

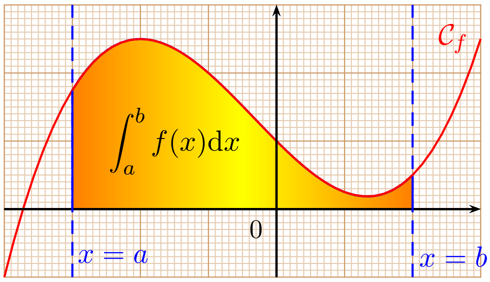
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $\mathrm{I} = [a; b]$.
On appelle **intégrale de f sur I** l'aire du domaine délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note alors cette intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

le x dans « dx » est à la variable par rapport à laquelle on effectue les calculs

Cette aire est exprimée en unités d'aire (u.a.), qui correspond à l'aire du rectangle de côtés OI et OJ.v

On peut visualiser cette aire de la façon suivante :



Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

la valeur de l'intégrale est indépendante du choix de F

Propriété 2.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathrm{I} = [\,a; b\,]$ et F une primitive de f sur I, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

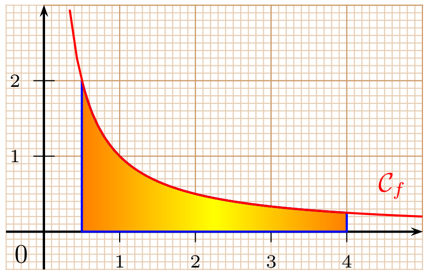
Pour les calculs, on note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [\,F(x)\,]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple 3

Aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 4$ dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm :

avec wxMaxima : `integrate(1/x,x,1/2,4)`

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)]_{\frac{1}{2}}^{4}\\ &= \ln 4 - \ln\frac{1}{2}\\ &= \ln 4 + \ln 2\\ &= \ln 8 \text{ u.a.} \approx 2,08 \text{ cm}^2\end{aligned}$$



1.2 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

dans ce cas, l'intégrale ne correspond pas forcément à l'aire du domaine

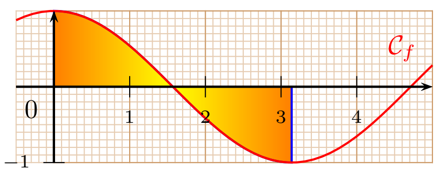
Définition 4.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathrm{I} = [\,a; b\,]$ dont F est une primitive. On appelle **intégrale de f de a à b** le réel défini par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Exemple 5

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x &= [\,\sin x\,]_0^{\pi}\\ &= \sin\pi - \sin 0\\ &= 0\end{aligned}$$



2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Linéarité

Propriété 6.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[\,a;b\,]$ de $\mathbb{R}$ et λ un réel, alors :

- $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,;$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Ce théorème permet en pratique de ramener le calcul d'une intégrale d'une fonction complexe à une succession d'intégrations de fonctions plus élémentaires.

Exemple 7

$$\begin{aligned} I = \int_1^2 \left(6x+\frac{5}{x}\right)\,\mathrm{d}x &= 3\int_1^2 2x\,\mathrm{d}x + 5\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 3[\,x^2\,]_1^2 + 5[\,\ln x\,]_1^2 \\ &= 3(2^2-1)+5(\ln 2-\ln 1) \\ &= 9+5\ln 2. \end{aligned}$$

2.2 Positivité

Propriété 8.

Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle $[\,a;b\,]$ de $\mathbb{R}$.

- si f est positive sur $[\,a;b\,]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0\,;$
- si pour tout $x\in[\,a;b\,]$, $f(x)\leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Remarque 9
La réciproque de la positivité n'est pas forcément vraie, on peut avoir $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ *sans avoir* f *positive sur* $[\,a;b\,]$ *:*

- $$\begin{aligned}\int_0^3 (2x-1)\,dx &= [\,x^2-x\,]_0^3 \\ &= (3^2-3)-(0^2-0) \\ &= 6.\end{aligned}$$
  Donc, $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)\,dx \geq 0.$
- *Cependant, la fonction* $f : x \to 2x-1$ *n'est pas positive sur* $[\,0\,;3\,]$ *(par exemple,* $f(0)=-1$*).*

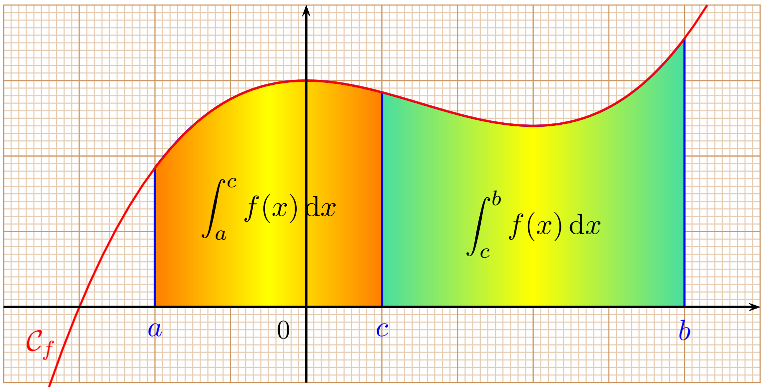
2.3 Relation de Chasles

Propriété 10.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ et $c \in [a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Interprétation graphique :



Remarque 11
Michel Chasles était un mathématicien français né en 1793 et mort en 1880.