

CHAPITRE

4

FONCTIONS LOGARITHME

Sommaire

Partie A (s5)	2
1 La fonction logarithme népérien	2
1.1 Définition	2
1.2 Propriétés algébriques	2
2 Étude de la fonction logarithme népérien	4
2.1 Variations de la fonction $x \mapsto \ln x$	4
2.2 Nombre e	4
2.3 Croissance comparée avec les fonctions puissance	5

Partie A (s₅)

Au début du XVII^e siècle, navigateurs, financiers et surtout astronomes sont confrontés à des calculs astronomiques. Pour faciliter ces calculs, le théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais John Napier (1550-1617, en français Neper) recherche une fonction qui puisse transformer des produits très compliqués à calculer en sommes plus abordables.

Il est amené à rechercher des fonctions f vérifiant $f(a \times b) = f(a) + f(b)$... le logarithme népérien est né !



1 La fonction logarithme népérien

1.1 Définition

Définition 1.

On appelle fonction **logarithme népérien**, notée \ln , l'unique fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ ayant pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et vérifiant, pour tous réels a et b strictement positifs, $f(a \times b) = f(a) + f(b)$.

1.2 Propriétés algébriques

Propriété 2.

Soient a et b deux réels strictement positifs et n est un entier relatif, alors :

- produit : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
- inverse : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
- quotient : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- puissance : $\ln(a^n) = n \ln(a)$;
- racine carrée : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

*propriété
fondamentale*

En résumé, le logarithme népérien a la particularité de transformer les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications.

Démonstrations :

- inverse : on a $a \times \frac{1}{a} = 1$.
 Donc, $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1) = 0$
 $\Leftrightarrow \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$
 $\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- quotient : on peut écrire $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right)$
 $= \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$
 $= \ln(a) - \ln(b)$.
- puissance : $\ln(a^n) = \ln(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}})$
 $= \underbrace{\ln(a) + \ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n \text{ fois}}$
 $= n \ln(a)$.
- racine carrée : on a $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.
 Donc, $\ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(a)$
 $\Leftrightarrow \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$
 $\Leftrightarrow \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

Remarque 3

La propriété fondamentale se généralise au cas d'un produit de n facteurs :

$$\ln(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n).$$

Exemple 4

Transformations d'expressions numériques :

- $\ln(24) = \ln(2^3 \times 3)$
 $= \ln(2^3) + \ln(3)$
 $= 3 \ln(2) + \ln(3)$.
- $\ln\left(\frac{16}{9}\right) = \ln(16) - \ln(9)$
 $= \ln(2^4) - \ln(3^2)$
 $= 4 \ln(2) - 2 \ln(3)$.
- $\ln(\sqrt{96}) = \frac{1}{2} \ln(96)$
 $= \frac{1}{2} \ln(2^5 \times 3)$
 $= \frac{1}{2} [5 \ln(2) + \ln(3)]$.

2 Étude de la fonction logarithme népérien

2.1 Variations de la fonction $x \mapsto \ln x$

D'après la définition, la fonction $x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0; +\infty[$, de dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. La dérivée étant positive, la fonction logarithme népérien est donc croissante sur $]0; +\infty[$.

On admet la propriété suivante :

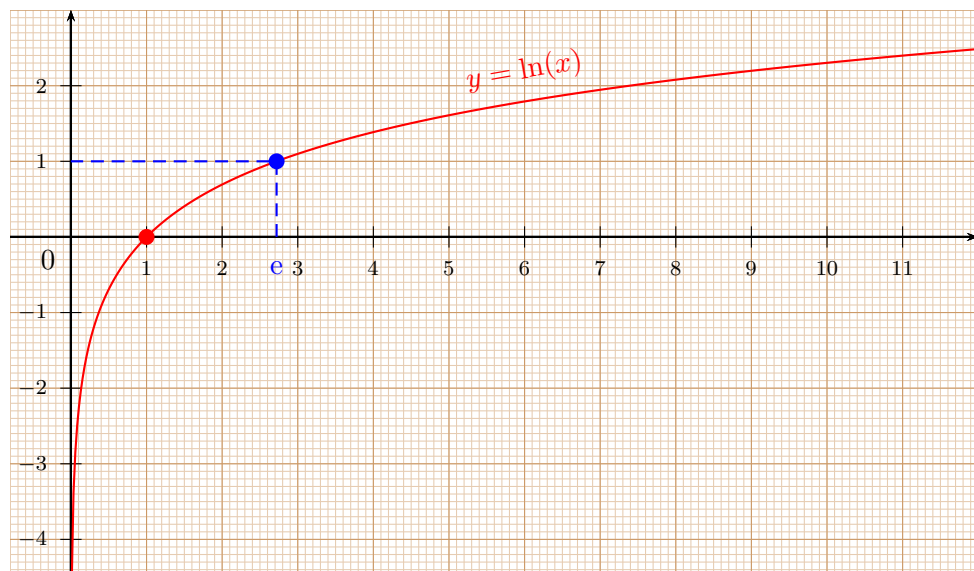
Propriété 5.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Conséquence : la droite $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction \ln .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
f			

D'après le tableau de variation de la fonction \ln , on en déduit que l'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution notée e dans $]0; +\infty[$.



2.2 Nombre e

On a deux valeurs importants à connaître concernant le logarithme népérien :

$$\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \ln(e) = 1$$

Exemple 6 

Simplification d'expressions contenant e :

- $\ln(e^2) = 2 \ln(e) = 2$;
- $\ln(e^{-1}) = -\ln(e) = -1$.

Propriété 7.Pour tout réel a , $\ln(e^a) = a$.**Démonstration :** pour tout réel a , $\ln(e^a) = a \ln e = a \times 1 = a$.**2.3** Croissance comparée avec les fonctions puissance**Propriété 8.**On a les limites suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$.

on dit que « la puissance l'emporte sur le logarithme »

En particulier, avec $n = 1$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$