

CHAPITRE

10 EXEMPLES DE LOIS À DENSITÉ

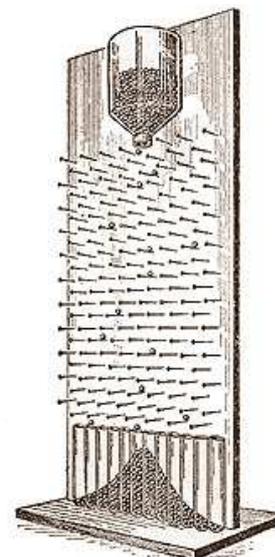
Sommaire

Partie A (s9)	2
1 Loi uniforme sur $[a, b]$	2
1.1 Définition	2
1.2 Espérance et variance	4
2 Loi exponentielle.....	5
2.1 Définition	5
2.2 Espérance	6

Partie A (s₉)

L'étude des phénomènes aléatoires a commencé avec l'étude des jeux de hasard. Ces premières approches sont des phénomènes discrets, c'est-à-dire dont le nombre de résultats possibles est fini ou dénombrable. De nombreuses questions ont cependant fait apparaître des lois dont le support est un intervalle tout entier.

Certains phénomènes amènent à une loi uniforme, d'autres à la loi exponentielle. Mais la loi la plus « présente » dans notre environnement est sans doute la loi normale : les prémices de la compréhension de cette loi de probabilité commencent avec Galilée lorsqu'il s'intéresse à un jeu de dé, notamment à la somme des points lors du lancer de trois dés. La question particulière sur laquelle Galilée se penche est : Pourquoi la somme 10 semble se présenter plus fréquemment que 9 ? Il publie une solution en 1618 en faisant un décompte des différents cas. Par la suite, Jacques Bernoulli, puis Abraham de Moivre fait apparaître la loi normale comme loi limite de la loi binomiale, au XVIII^e siècle. Pierre-Simon Laplace et Friedrich Gauss poursuivront leurs travaux dans ce sens.



Les lois étudiées jusqu'à présent (bernoulli, binomiale) sont des lois « discrètes ». Dans ce chapitre, on s'intéresse à des lois « continues », c'est-à-dire pour lesquelles la variable aléatoire peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle, on les appelle lois à densité.

1 Loi uniforme sur $[a, b]$

1.1 Définition

Définition 1.

Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} . On dit que la variable aléatoire X suit une **loi uniforme sur $[a, b]$** si pour tout intervalle $I = [c, d]$ inclus dans $[a, b]$, la probabilité de l'événement « $X \in I$ » est l'aire du rectangle délimité par la droite d'équation $y = \frac{1}{b-a}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = d$. On peut donc écrire aussi :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t) dt \quad \text{avec} \quad f(t) = \frac{1}{b-a}$$

f est appelée **densité de la loi uniforme sur $[a, b]$** .

$$\text{On a alors } \int_c^d \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t}{b-a} \right]_c^d = \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a}.$$

$$\text{Et } P(X = c) = P(c \leq X \leq c) = 0.$$

on note $X \sim \mathcal{U}[a, b]$

Propriété 2.

Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, alors

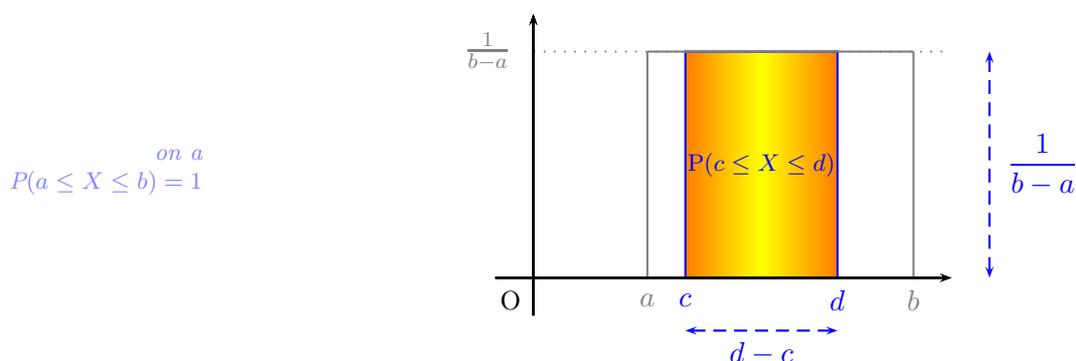
$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d - c}{b - a}$$

Remarque 3

Pour toute loi continue, pour tout réel c , $P(X = c) = 0$, donc :

$$P(c \leq X \leq d) = P(c < X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X < d).$$

Représentation graphique :



Cas d'utilisations de la loi uniforme : cette loi modélise un phénomène uniforme sur un intervalle donné. La notion d'uniformité vient du fait que la probabilité qu'une valeur tirée d'une loi uniforme soit dans un certain intervalle ne dépend pas de la position de l'intervalle, mais uniquement de sa longueur.

On l'utilise généralement lorsque la situation se ramène à choisir **au hasard** un réel dans un intervalle $[a, b]$.

Exemple 4 

À l'arrêt de bus des papangues, un bus passe toutes les 10 minutes. Un voyageur ignore les horaires et arrive à cet arrêt de bus. Quelle est la probabilité d'attendre le bus exactement 3 minutes ? entre 2 et 4 minutes ? plus de 5 minutes ?

On note T la variable aléatoire représentant le temps d'attente, en minutes. On suppose que T suit la loi uniforme $\mathcal{U}[0; 10]$.

- $P(3 \leq T \leq 3) = \int_3^3 \frac{1}{10-0} dt = \left[\frac{t}{10} \right]_3^3 = \frac{3-3}{10} = \frac{0}{10} = 0;$
- $P(2 \leq T \leq 4) = \int_2^4 \frac{1}{10-0} dt = \left[\frac{t}{10} \right]_2^4 = \frac{4-2}{10} = \frac{2}{10} = 0,2;$
- $P(T \geq 5) = 1 - P(T < 5) = 1 - \frac{5}{10} = \frac{5}{10} = 0,5.$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$



L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet de modéliser une loi uniforme sur $[a, b]$.

Syntaxes pour obtenir un nombre au hasard entre 0 et 1 :

tableur	TI	casio	AlgoBox	Python
ALEA()	NbrAléat	Ran#	random()	random()

Pour obtenir un nombre entre a et b , on utilise la syntaxe `=ALEA()*(b-a)+a`

En anglais, *random* signifie « hasard »

1.2 Espérance et variance

Définition 5.

Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[a, b]$, on appelle espérance de X le réel, noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = \int_a^b t f(t) dt$$

on appelle variance de X le réel, $V(X)$ défini par

$$V(X) = \int_a^b (t - E(X))^2 f(t) dt$$

cas discret :

$$\sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

L'espérance est une valeur numérique permettant d'évaluer le résultat moyen d'une expérience aléatoire.

L'écart-type σ correspond à la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété 6.

Si $X \sim \mathcal{U}[a, b]$, l'espérance $E(X)$ et la variance $\sigma(X)$ sont donnés par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$E(X)$ correspond au centre de l'intervalle

Démonstrations :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2} \right)^2 \times \frac{1}{b-a} dt \\ &= \frac{1}{b-a} \times \left[\frac{1}{3} \left(t - \frac{a+b}{2} \right)^3 \right]_a^b \\ &= \frac{1}{3(b-a)} \times \left(\left(b - \frac{a+b}{2} \right)^3 - \left(a - \frac{a+b}{2} \right)^3 \right) \\ &= \frac{1}{24(b-a)} \times \left((b-a)^3 - (a-b)^3 \right) \\ &= \frac{2}{24(b-a)} \times (b-a)^3 \\ &= \frac{1}{12} \times (b-a)^2 \end{aligned}$$

Exemple 7

L'attente moyenne de notre voyageur à l'arrêt de bus des papangues, sera de :

$$E(T) = \frac{0+10}{2} = 5 \text{ minutes.}$$

L'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{12}} \times (10 - 0) = 1,67$ nous informe sur la manière dont les temps d'attente se répartissent autour de la moyenne.

2 Loi exponentielle

2.1 Définition

Définition 8.

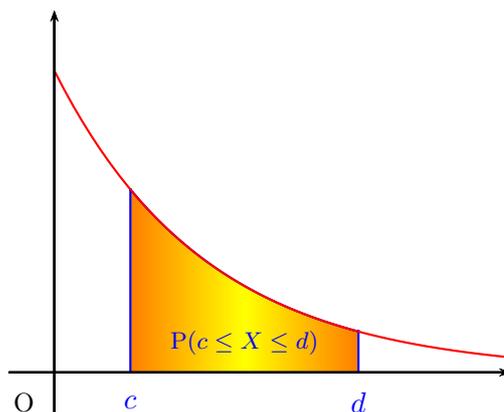
on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Soit λ un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire X à valeurs dans $[0; +\infty[$ suit la **loi exponentielle de paramètre λ** , si pour tous réels c et d dans $[0; +\infty[$, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t) dt \quad \text{avec} \quad f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

f est appelée **densité de la loi exponentielle de paramètre λ** .

Représentation graphique :



On a alors $\int_c^d \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_c^d = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

Donc, $P(X \leq t) = P(0 \leq X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Propriété 9.

Une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^+ suit la loi exponentielle de paramètre λ si, et seulement si, pour tout $t \geq 0$,

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Cas d'utilisations de la loi exponentielle : une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant un temps t ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t .

Elle permet entre autres de modéliser la durée de vie de la radioactivité ou d'un composant électronique, de décrire le temps écoulé entre deux moments...

Exemple 10 

La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,00005.

On détermine la probabilité que ce composant tombe en panne avant 10 000 heures, qu'il fonctionne au moins 15 000 heures, et qu'il tombe en panne entre la 10 000^e heure et la 15 000^e heure :

- $P(T < 10000) = P(T \leq 10000) = 1 - e^{-0,00005 \times 10000} = 0,40$;
- $P(T \geq 15000) = 1 - P(T < 15000) = 1 - (1 - e^{-0,00005 \times 15000}) = 0,47$;
- $P(10000 \leq T \leq 15000) = P(T \leq 15000) - P(T < 10000) = 0,47 - 0,40 = 0,07$.

$$P(a \leq T \leq b) = P(T \leq b) - P(T < a)$$

2.2 **Espérance****Définition 11.**

L'espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x tf(t) dt$$

Propriété 12.

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ , l'espérance $E(X)$ est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Exemple 13 

On reprend l'exemple 10 précédent, on calcule :

$$E(X) = \frac{1}{0,00005} = 20\,000.$$

On peut donc en conclure que la durée de vie moyenne du composant électronique est de 20 000 heures.