CHAPITRE

3 Dérivées et primitives

Sommaire

Partie A (s1)

Leibniz 1646-1717

Dès l'antiquité, les Grecs s'intéressent à la détermination des tangentes à des courbes. Ainsi **Archimède** *(−287; −212) Propose une construction de la tangente en un point d'une spirale.*
Près de deux mille ans plus tard, le mathématicien et physicien français **Gilles Personne de Roberval** *(1602-1675) utilise la composition des vitesses pour aboutir au même résultat.*
C'est le début du calcul différentiel développé séparément et différemment par les philosophes et mathématiciens allemand **Gottfried Wilhem Von Leibniz** *et anglais* **Isaac Newton**.

Newton 1643-1727

1 Rappels de première

1.1 Nombre dérivé

La notation $f'(x)$ est due au mathématicien Français Lagrange (1736-1813). Les physiciens privilégient la notation de Leibniz : $\dfrac{dy}{dx}$.

Définition 1.

Soit f une fonction numérique, définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable** en un point x_0 de I si la quantité

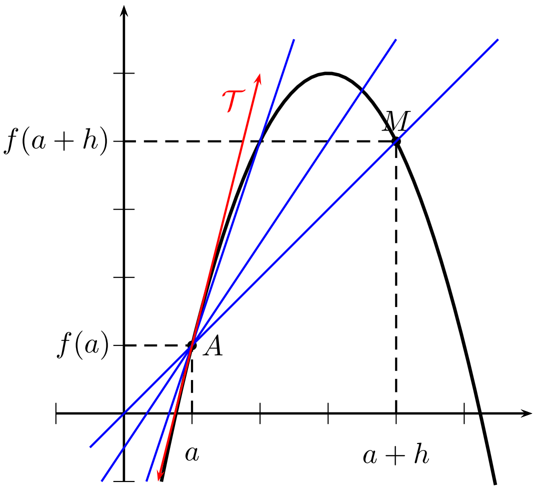
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

admet une limite finie quand h tend vars 0.
Cette limite est appelée **nombre dérivé** en x_0 et notée $f'(x_0)$.

Interprétation graphique :
Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche du point A. Ainsi, la droite (AM) se rapproche de la tangente $\mathcal{T}$ au point A

$f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse a.

En physique, la vitesse $v(t)$ en un point de date t est le nombre dérivé de la fonction $x = f(t)$. On note $v(t) = f'(t) = \dfrac{dx}{dt}$.



Voir animation GéoGébra « Nombre_derive »

1.2 Tableaux des dérivées

Définition 2.

Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelé **fonction dérivée** de f sur I.

Pour obtenir les formules des dérivées, on utilise la définition du nombre dérivé :

Exemple 3

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

- $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \dfrac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x + h.$
- donc, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (2x+h) = 2x$.

On obtient le tableau de dérivation suivant :

Fonction f	Fonction f'	Intervalle I
k	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\omega\cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$-\omega\sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$

En prenant $\omega = 1$ et $\varphi = 0$, on retrouve les formules précédentes.

Exemple 4

- si $f(x) = \pi$, alors $f'(x) = 0$;
- si $f(x) = x^{2014}$, alors $f'(x) = 2014\,x^{2013}$;
- si $f(t) = \cos(2t-3)$, alors $f'(x) = -2\sin(2t-3)$.

Dans le cas de fonctions plus complexes, on a les formules suivantes :
u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication	$k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$
Produit	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Inverse	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
Quotient	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

En prenant $u = 1$, on retrouve la formule précédente.

Exemple 5

- $f(x) = x^3 + x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(u+v)' = u' + v'$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x + 3$.
  On obtient $f'(x) = 3x^2 + 1$.
- $f(x) = 3(x^2 + 4)$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(ku)' = ku'$ avec $k = 3$ et $u(x) = x^2 + 4$.
  On obtient $f'(x) = 6x$.
- $f(x) = (-2x + 3)(5x - 3)$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = -2x + 3$ et $v(x) = 5x - 3$.
  On obtient $f'(x) = -20x + 21$.

On peut utiliser un logiciel de calcul formel, comme par exemple wxMaxima : `diff(1/(-3*x+1),x,1);`

- $f(x) = \dfrac{1}{-3x+1}$ définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$.
  Formule : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = -3x + 1$.
  On obtient $f'(x) = \dfrac{3}{(-3x+1)^2}$.
- $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2+3}$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 3x - 4$ et $v(x) = x^2 + 3$.
  On obtient $f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 8x + 9}{(x^2+3)^2}$.

1.3 Lien avec le sens de variation

Propriété 6.

On suppose que f est dérivable sur I.

- f est croissante sur $I \iff f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur $I \iff f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Il est donc possible de déterminer les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

Exemple 7

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons son sens de variation :

- pour tout réel x on a $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$;

pour cela, on calcule le discriminant, qui vaut 9, donc positif

- on détermine le signe de $x^2 - x - 2$ en cherchant ses racines, on trouve -1 et 2 ;
  $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$ est positive sauf entre ses racines -1 et 2 ;
- on détermine le signe de la dérivée et on en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-21	$\nearrow$	$+\infty$

- f est croissante sur $]-\infty\,;-1\,]$ et sur $[\,2\,;+\infty\,[$ et décroissante sur $[\,-1\,;\,2\,]$.

2 Compléments : dérivées composées

2.1 Fonction $x \to u^n(x)$

On considère un entier relatif n non nul, une fonction u dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par $f(x) = (u(x))^n$.

Propriété 8.

- Si $n > 0$, alors f est dérivable sur I, de dérivée $f'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$.
- Si $n < 0$ et si pour tout x de I, $u(x) \neq 0$ alors f est dérivable sur I, de dérivée $f'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$.

la formule est la même, mais les hypothèses différentes

Exemple 9

- $f(x) = (2x-7)^4$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$ avec $u(x) = 2x - 7$ et $n = 4$.
  On obtient $f'(x) = 8(2x-7)^3$.
- $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3} = (x^2+1)^{-3}$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$ avec $u(x) = x^2 + 1$ non nul et $n = -3$.
  On obtient $f'(x) = -6x \times (x^2+1)^{-4} = -\dfrac{6x}{(x^2+1)^4}$.

l'astuce est de transformer la fonction inverse

à traiter après les fonctions logarithme et exponentielle

2.2 Fonctions $x \to \ln(u(x))$ et $x \to \mathrm{e}^{u(x)}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Propriété 10.

- La fonction $f : x \to \ln(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- La fonction $f : x \to \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I de dérivée $f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.

Exemple 11

- $f(x) = \ln(-2x+6)$ définie sur $]-\infty\,;3\,[$.
  Formule : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = -2x + 6$.
  On obtient $f'(x) = -\dfrac{-2}{-2x+6}$.
- $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 3x + 1$.
  On obtient $f'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x+1}$.

Remarque 12

De manière générale, soit u et f des fonctions dérivables, la dérivée d'une fonction du type $x \to f(u(x))$ est $x \to f'(u(x)) \times u'(x)$.

Partie B (s₆)

À partir d'une fonction f, on a vu que l'on pouvait déterminer sa dérivée f'. On peut donc se poser la question inverse : est-il possible, à partir d'une fonction dérivée, de « remonter » à la fonction d'origine ? ? ?

3 Primitives d'une fonction sur un intervalle

3.1 Primitives, késako ?

Définition 13.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I vérifiant

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Exemple 14

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.

on ne parle pas de LA primitive, mais DES primitives de f

- La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puisque $F'(x) = f(x)$.
- La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^3 + 2$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puisque $G'(x) = f(x)$.

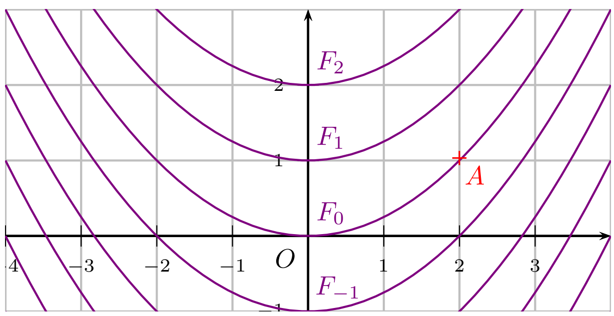
Propriété 15.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- si f admet une primitive F sur I, les primitives de f sont les fonctions du type $G(x) = F(x) + c$ où c est une constante réelle ;
- si de plus on impose la condition $F(x_0) = y_0$, la primitive est unique.

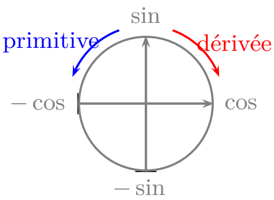
Exemple 16

- Les fonctions $F_0(x) = \frac{1}{4}x^2$, $F_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$, $F_2(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$, ... , $F_c(x) = \frac{1}{4}x^2 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ sont toutes des primitives de la fonctions $f : x \to \frac{x}{2}$;
- cependant, il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(2) = 1$: il s'agit de F_0.



3.2 Primitives des fonctions de référence

La lecture du tableau des primitive se fait en lisant celui des dérivées « à l'envers ». Les fonctions f suivantes sont définies, dérivables sur l'intervalle I, n est un entier relatif non nul différent de -1.



$f(x)$	$F(x)$	I
0	k	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

$f(x)$	$F(x)$	I
a	ax	$\mathbb{R}$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n>0$ $\mathbb{R}^*$ si $n<0$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$

à faire après les fonctions logarithme et exponentielle

Remarque 17
Ce tableau ne donne qu'UNE primitive de la fonction f. Pour obtenir toutes les primitives de f, il suffit de rajouter une constante c à F.

Exemple 18

- Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^8}=x^{-8}$ est $F(x)=-\dfrac{1}{7x^7}$.
- Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\cos(2t+3)$ est $F(t)=\dfrac{1}{2}\sin(2t+3)$.

3.3 Opérations sur les primitives

u' et v' sont des fonction définies sur I, de primitives u et v et n est un entier relatif non nul différent de -1.

Fonction du type	Une primitive	Condition
$u'+v'$	$u+v$	
$k\times u'$	$k\times u$	
$u'\,u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$u(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$ si n est négatif
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x)>0$ sur I

à faire après les fonctions logarithme et exponentielle

Exemple 19

- $f(x)=2x(x^2-1)^5$ est du type $u'u^5$ de primitive $\dfrac{u^6}{6}$. Donc, $F(x)=\dfrac{(x^2-1)^6}{6}$.
- $f(x)=3x^2+2\cos(2x)$ est du type $u'+v'$ de primitive $u+v$. Donc, $F(x)=x^3+\sin(2x)$.
- $f(x)=-3\,\mathrm{e}^{-3x-1}$ est du type $u'\,\mathrm{e}^u$ de primitive e^u. Donc, $F(x)=\mathrm{e}^{-3x-1}$.
- $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+3}$ est du type $\dfrac{u'}{u}$ de primitive $\ln(u)$. Donc, $F(x)=\ln(x^2-x+3)$.