CHAPITRE

3 DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

Sommaire

Partie A (s1)

Leibniz 1646-1717

Dès l'antiquité, les Grecs s'intéressent à la détermination des tangentes à des courbes. Ainsi **Archimède** *(−287; −212) Propose une construction de la tangente en un point d'une spirale.*
Près de deux mille ans plus tard, le mathématicien et physicien français **Gilles Personne de Roberval** *(1602-1675) utilise la composition des vitesses pour aboutir au même résultat.*
C'est le début du calcul différentiel développé séparément et différemment par les philosophes et mathématiciens allemand **Gottfried Wilhelm Von Leibniz** *et anglais* **Isaac Newton**.

Newton 1643-1727

1 Rappels de première

1.1 Nombre dérivé

La notation $f'(x)$ est due au mathématicien Français Lagrange (1736-1813). Les physiciens privilégient la notation de Leibniz : $\frac{dy}{dx}$.

Définition 1.

Soit f une fonction numérique, définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable** en un point x_0 de I si la quantité

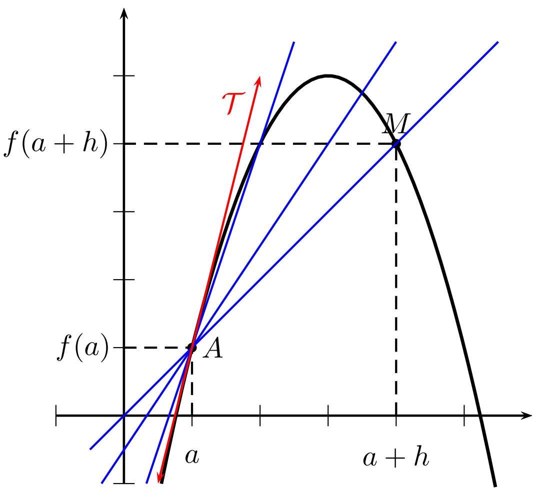
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

admet une limite finie quand h tend vars 0.
$\frac{2}{3}$ Cette limite est appelée **nombre dérivé** en x_0 et notée $f'(x_0)$.

Interprétation graphique :
Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche du point A. Ainsi, la droite (AM) se rapproche de la tangente $\mathcal{T}$ au point A

$f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse a.

En physique, la vitesse $v(t)$ en un point de date t est le nombre dérivé de la fonction $x = f(t)$. On note $v(t) = f'(t) = \frac{dx}{dt}$.



Voir animation GéoGébra « Nombre_derive »

1.2 Tableaux des dérivées

Définition 2.

Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelé **fonction dérivée** de f sur I.

Pour obtenir les formules des dérivées, on utilise la définition du nombre dérivé :

Exemple 3

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

- $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \dfrac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x + h.$
- donc, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$.

On obtient le tableau de dérivation suivant :

Fonction f	Fonction f'	Intervalle I
k	0	$\mathbb{R}$
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\omega \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$-\omega \sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$

En prenant $\omega = 1$ et $\varphi = 0$, on retrouve les formules précédentes.

Exemple 4

- si $f(x) = \pi$, alors $f'(x) = 0$;
- si $f(x) = x^{2014}$, alors $f'(x) = 2014\,x^{2013}$;
- si $f(t) = \cos(2t - 3)$, alors $f'(x) = -2\sin(2t - 3)$.

Dans le cas de fonctions plus complexes, on a les formules suivantes :
u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u + v$	$u' + v'$
Multiplication	$k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$
Produit	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Inverse	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
Quotient	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

En prenant $u = 1$, on retrouve la formule précédente.

Exemple 5

- $f(x) = x^3 + x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(u+v)' = u' + v'$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x + 3$.
  On obtient $f'(x) = 3x^2 + 1$.
- $f(x) = 3(x^2 + 4)$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(ku)' = ku'$ avec $k = 3$ et $u(x) = x^2 + 4$.
  On obtient $f'(x) = 6x$.
- $f(x) = (-2x + 3)(5x - 3)$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = -2x + 3$ et $v(x) = 5x - 3$.
  On obtient $f'(x) = -20x + 21$.

On peut utiliser un logiciel de calcul formel, comme par exemple wxMaxima : `diff(1/(-3*x+1),x,1);`

- $f(x) = \dfrac{1}{-3x+1}$ définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$.
  Formule : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = -3x + 1$.
  On obtient $f'(x) = \dfrac{3}{(-3x+1)^2}$.
- $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2+3}$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 3x - 4$ et $v(x) = x^2 + 3$.
  On obtient $f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 8x + 9}{(x^2+3)^2}$.

1.3 Lien avec le sens de variation

Proriété 6.

On suppose que f est dérivable sur I.

- f est croissante sur $I \iff f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur $I \iff f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Il est donc possible de déterminer les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

Exemple 7

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons son sens de variation :

- pour tout réel x on a $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$;

pour cela, on calcule le discriminant, qui vaut 9, donc positif

- on détermine le signe de $x^2 - x - 2$ en cherchant ses racines, on trouve -1 et 2 ;
  $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$ est positive sauf entre ses racines -1 et 2 ;
- on détermine le signe de la dérivée et on en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-21	$\nearrow$	$+\infty$

- f est croissante sur $]-\infty\,;-1\,]$ et sur $[\,2\,;+\infty\,[$ et décroissante sur $[\,-1\,;\,2\,]$.

2 Compléments : dérivées composées

2.1 Fonction $x \to u^n(x)$

On considère un entier relatif n non nul, une fonction u dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par $f(x) = (u(x))^n$.

Proriété 8.

- Si $n > 0$, alors f est dérivable sur I, de dérivée $f'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$.
- Si $n < 0$ et si pour tout x de I, $u(x) \neq 0$ alors f est dérivable sur I, de dérivée $f'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$.

la formule est la même, mais les hypothèses différentes

Exemple 9

- $f(x) = (2x - 7)^4$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$ avec $u(x) = 2x - 7$ et $n = 4$.
  On obtient $f'(x) = 8(2x - 7)^3$.
- $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3} = (x^2+1)^{-3}$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$ avec $u(x) = x^2 + 1$ non nul et $n = -3$.
  On obtient $f'(x) = -6x \times (x^2+1)^{-4} = -\dfrac{6x}{(x^2+1)^4}$.

l'astuce est de transformer la fonction inverse

à traiter après les fonctions logarithme et exponentielle

2.2 Fonctions $x \to \ln(u(x))$ et $x \to \mathrm{e}^{u(x)}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Proriété 10.

- La fonction $f : x \to \ln(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- La fonction $f : x \to \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I de dérivée $f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.

Exemple 11

- $f(x) = \ln(-2x + 6)$ définie sur $]-\infty\,;3[$.
  Formule : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = -2x + 6$.
  On obtient $f'(x) = -\dfrac{-2}{-2x+6}$.
- $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
  Formule : $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 3x + 1$.
  On obtient $f'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x+1}$.

Remarque 12

De manière générale, soit u et f des fonctions dérivables, la dérivée d'une fonction du type $x \to f(u(x))$ est $x \to f'(u(x)) \times u'(x)$.