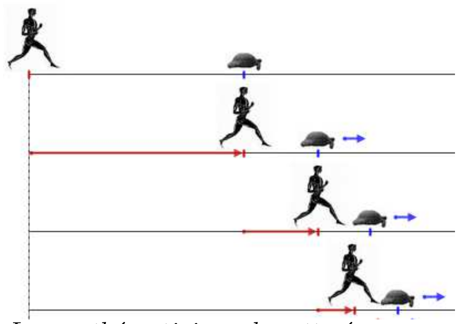
CHAPITRE

2 Limites de fonctions

Sommaire

Partie A (s₄)

On peut faire commencer l'histoire du concept de limite avec le philosophe grec **Zénon d'Élée** *(-450). Il est connu pour ses paradoxes qui prétendent démontrer l'impossibilité du mouvement.*
Par exemple, celui d'Achille et de la tortue :
« Achille, situé en O, poursuit une tortue qui se trouve en A. Le temps qu'il arrive en A, la tortue sera en B. Achille devra donc ensuite aller en B. Mais alors la tortue sera en C, et ainsi de suite. Achille pourra se rapprocher sans cesse de la tortue, mais il ne pourra jamais la rattraper. »



L'Analyse fit d'énormes progrès au cours des XVII^{e} et XVIII^{e} siècles. Les mathématiciens de cette époque avaient une intuition de la notion de limite mais il faudra attendre le XIX^{e} avec le français **Louis-Augustin Cauchy** *(1789-1857), puis l'allemand* **Karl Weierstrass** *(1815-1897) pour avoir une définition précise de la limite.*

1 Asymptotes parallèles aux axes

1.1 Approche graphique

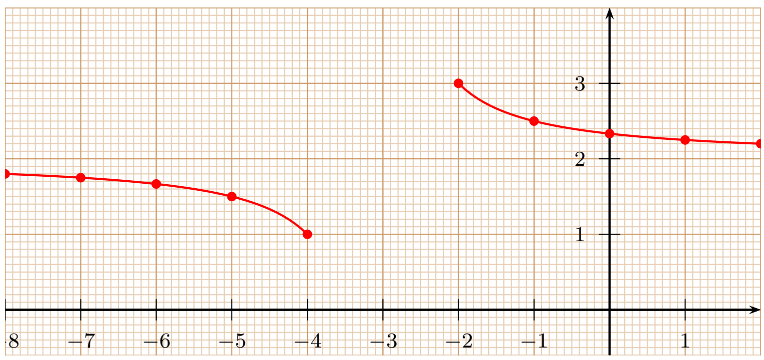
On considère la fonction f, définie pour tout $x \neq 3$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+3} + 2 = \dfrac{2x+7}{x+3}$.

On souhaite représenter cette fonction. On construit le tableau de valeurs suivant :

la fonction n'est pas définie pour $x = -3$

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1,8	1,75	1,67	1,5	1		3	2,5	2,33	2,25	2,2

Ce qui donne :



Graphiquement, on observe deux phénomènes :

- entre -4 et -2, nous n'avons pas assez d'éléments pour savoir ce qu'il se passe. Il nous faut construire un tableau plus précis avec des valeurs proches de -3 :

x	$-3,1$	$-3,01$	$-3,001$	$-3,0001$	$-2,9999$	$-2,999$	$-2,99$	$-2,9$
$f(x)$	-8	-98	-998	-9998	10002	1002	102	12

On remarque que plus on se rapproche de -3, plus la courbe prend de grandes valeurs . On note $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$.

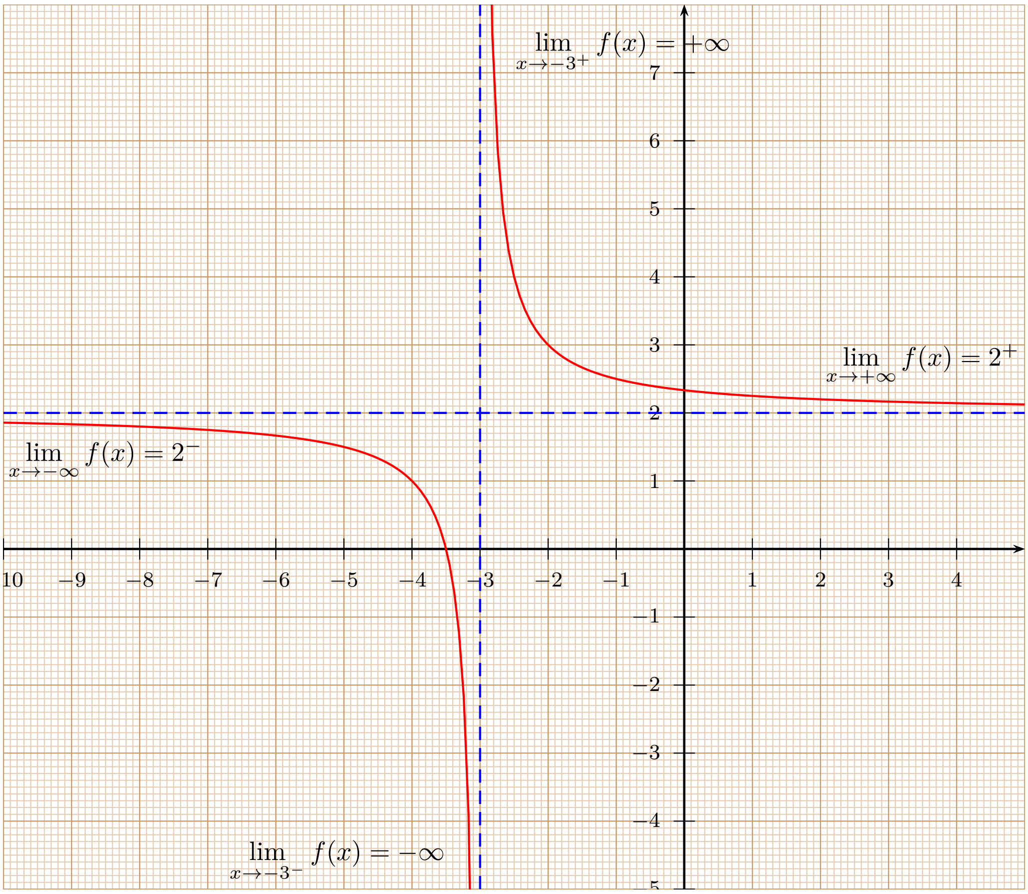
- « avant » 8 et « après » 2, on a l'impression que la courbe se rapproche de la droite d'équation $y = 2$. Afin d'étayer ce phénomène, on construit un tableau avec de grandes valeurs en valeur absolue :

x	-10^4	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$	$1,9999$	$1,9990$	$1,989$	$1,8571$	$2,0769$	$2,0097$	$2,0010$	$2,0001$

On remarque que plus on se rapproche de $\pm\infty$, plus les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de 2 . On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Ce qui nous permet d'obtenir un graphique plus complet :

les notations seront introduites dans les paragraphes suivants

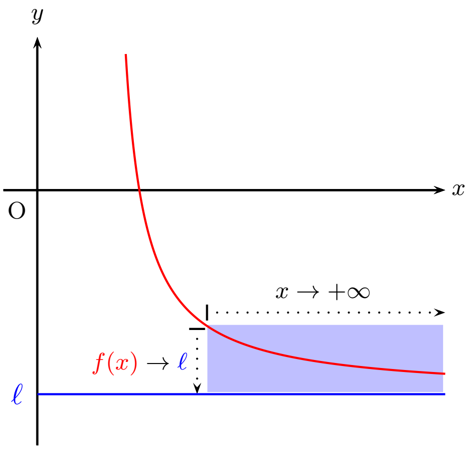


1.2 Limite finie d'une fonction à l'infini

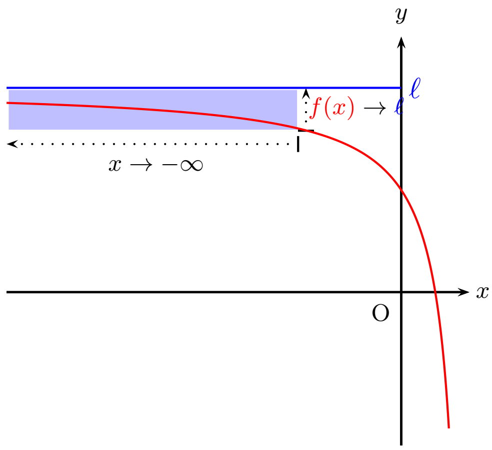
Définition 1.

a est un nombre réel. Soit f une fonction définie sur au moins $]\,a;+\infty[$ (respectivement $]-\infty, a\,[$). Lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, (respectivement vers $-\infty$), si les nombres $f(x)$ deviennent de plus proches d'une réel ℓ, on dit que $f(x)$ a pour **limite** ℓ en $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$). On note :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Définition 2.

On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

1.3 Limite infinie d'une fonction en un point

Définition 3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]\,a\,;b\,]$ ou $[\,b\,;a\,[$ où a et b sont des réels. Lorsque le réel x s'approche de a, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

- grands, on dit que f a pour **limite** $+\infty$ en a et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

- grands en valeur absolue, mais négatifs, on dit que f a pour **limite** $-\infty$ en a et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

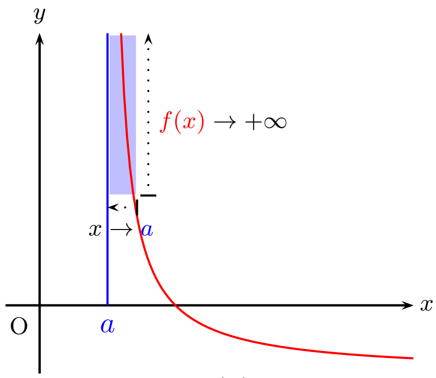
Remarque 4

Lorsque le fonction n'est pas définie en a, on précise si on s'en approche

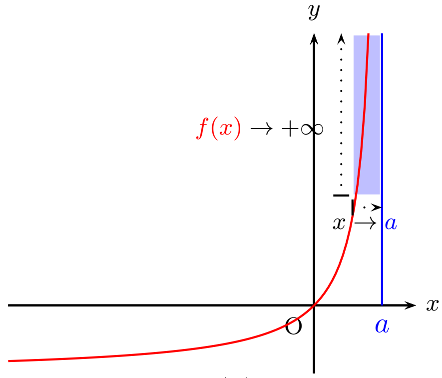
$\pm\infty$ signifie que la limite est soit $+\infty$, soit $-\infty$

- *par valeurs inférieures :* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ *;*
- *par valeurs supérieurs :* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

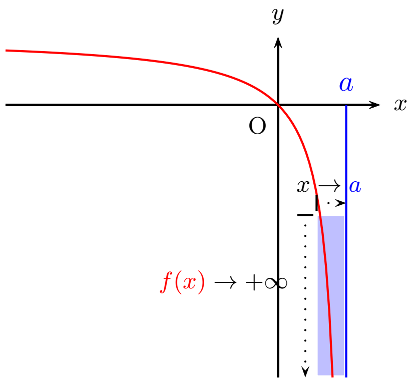
On obtient les quatre cas suivants :



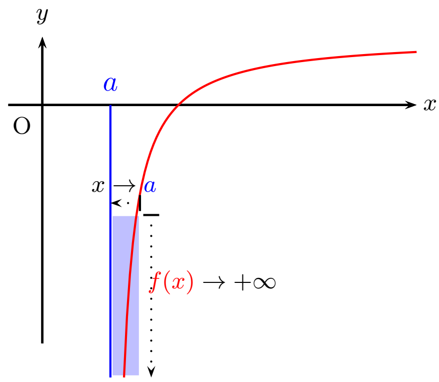
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$$

Définition 5.

Dans le cas où la limite en a vaut $\pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

2 Limite infinie d'une fonction en l'infini

Définition 6.

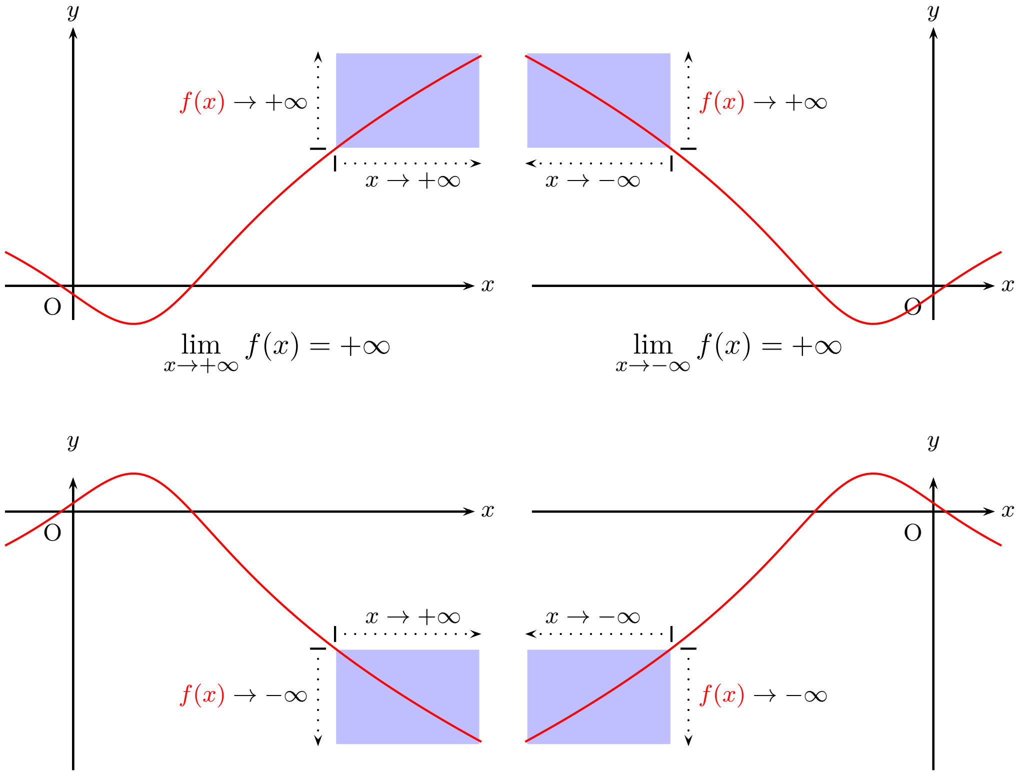
Soit f une fonction définie au moins sur $]\,a\,;+\infty[$ (respectivement $]-\infty\,;a\,[$). Lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

- grands, on dit que f a pour **limite** $+\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty)$$

- grands en valeur absolue et négatifs, on dit que f a pour **limite** $-\infty$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty)$$

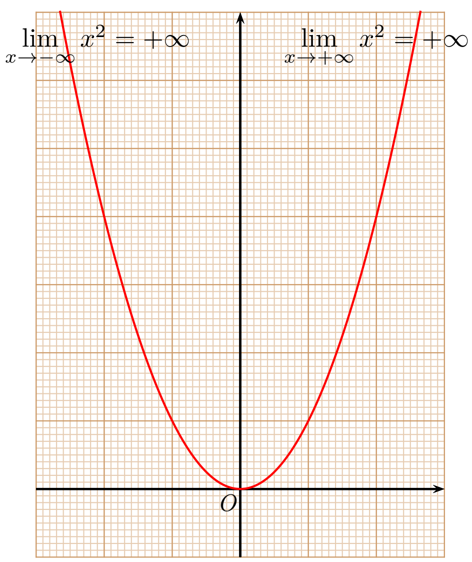


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

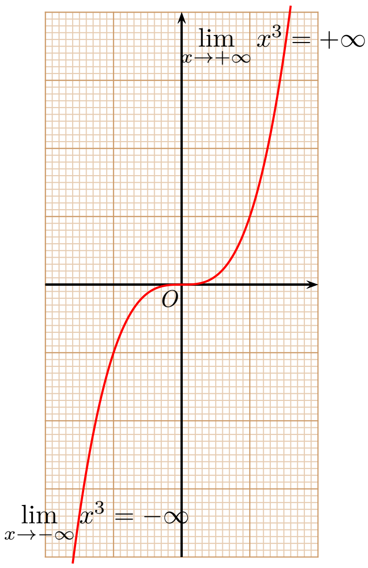
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Remarque 7
Certaines fonctions n'admettent pas de limite en l'infini : par exemple les fonctions cosinus et sinus.

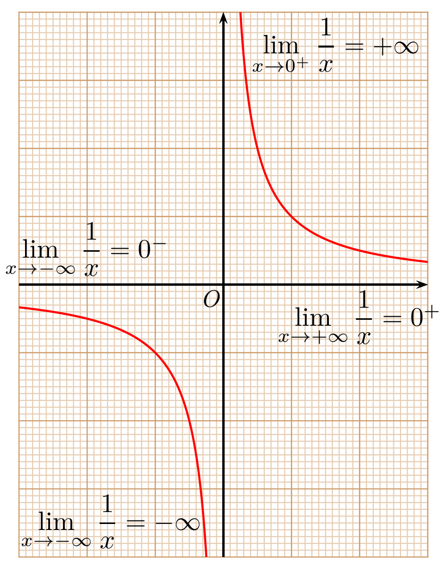
3 Limites des fonctions usuelles



fonction carré



fonction cube



fonction inverse

Partie B ($\mathbf{s}_{10}$)

4 Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, la notation « FI » désigne une Forme Indéterminée, c'est à dire une limite que l'on ne peut pas calculer par une opération élémentaire.
La notation « $*$ » signifie qu'il faut appliquer la règle des signes.

4.1 Limite d'une somme

$\lim\ f$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\ (f+g)$	$l+l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple 8
Calcul de sommes de limites :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 3 & = & 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}+3\right) = +\infty.$
  La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation $x=0$.
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to -\infty} x & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} (x+x^3) = -\infty.$

pour lever la FI, il faudrait écrire $x^2+x^3 = x^3\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+x^3)$ est une forme indéterminée .

4.2 Limite d'un produit

$\lim\ f$	l	$l\neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\ (f\times g)$	$l\times l'$	$*\infty$	$*\infty$	FI

Exemple 9
Calcul de produits de limites :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0^+} (x-3) & = & -3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0^+} \left[(x-3)\times\dfrac{1}{x}\right] = -\infty.$
  La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation $x=0$.
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to -\infty} (x-1) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} [(x-1)\times x^3] = +\infty.$

pour lever la FI, il faudrait écrire $(x^2+1)\times\dfrac{1}{x} = x+\dfrac{1}{x}$

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^- \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} \left[(x^2+1)\times\dfrac{1}{x}\right]$ est une forme indéterminée.

4.3 Limite d'un quotient

$\lim f$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim \left(\dfrac{f}{g}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$*\infty$	$*\infty$	FI	FI

Exemple 10
Calcul de quotients de limites :

- $\left.\begin{array}{lcr} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}-3\right) & = & -3 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}-3}{x^2}\right) = 0^-.$
  La courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
- $\left.\begin{array}{lcr} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x-4 & = & -4 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x & = & 0^+ \end{array}\right\} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x-4}{x}\right) = -\infty.$
  La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

pour lever la FI, il faudrait écrire $\dfrac{x-1}{x^3} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$

- $\left.\begin{array}{lcr} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x-1) & = & -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-1}{x^3}\right)$ est une forme indéterminée.
- $\left.\begin{array}{lcr} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x-2) & = & +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 5 & = & 5 \end{array}\right\} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-2}{5}\right) = +\infty.$

5 Limite de la fonction $x \mapsto (u(x))^n$

Propriété 11.

Soit u une fonction définie sur un $I \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et ℓ un réel.

- si $\displaystyle\lim_{x\to a} u(x) = \ell$, alors $\displaystyle\lim_{x\to a} (u(x))^n = \ell^n$;
- si $\displaystyle\lim_{x\to a} u(x) = +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to a} (u(x))^n = +\infty$;
- si $\displaystyle\lim_{x\to a} u(x) = -\infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to a} (u(x))^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

Exemple 12
Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;3\,[\cup]\,3\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \left(\dfrac{1}{x-3}\right)^2$.

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x-3) = -\infty$ donc, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-3} = 0$ donc, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x-3}\right)^2 = 0$;
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} (x-3) = 0^-$ donc, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-3} = -\infty$ donc, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x-3}\right)^2 = +\infty$;
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} (x-3) = 0^+$ donc, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-3} = +\infty$ donc, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x-3}\right)^2 = +\infty$;
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x-3) = +\infty$ donc, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-3} = 0$ donc, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x-3}\right)^2 = 0$.