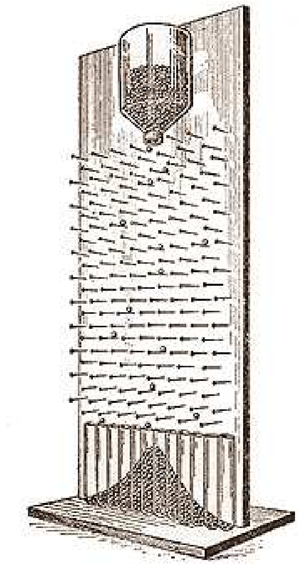
CHAPITRE

10 Exemples de lois à densité

Sommaire

Partie A (s9)

L'étude des phénomènes aléatoires a commencé avec l'étude des jeux de hasard. Ces premières approches sont des phénomènes discrets, c'est-à-dire dont le nombre de résultats possibles est fini ou dénombrable. De nombreuses questions ont cependant fait apparaître des lois dont le support est un intervalle tout entier.
Certains phénomènes amènent à une loi uniforme, d'autres à la loi exponentielle. Mais la loi la plus « présente » dans notre environnement est sans doute la loi normale : les prémices de la compréhension de cette loi de probabilité commencent avec Galilée lorsqu'il s'intéresse à un jeu de dé, notamment à la somme des points lors du lancer de trois dés. La question particulière sur laquelle Galilée se penche est : Pourquoi la somme 10 semble se présenter plus fréquemment que 9 ? Il publie une solution en 1618 en faisant un décompte des différents cas. Par la suite, Jacques Bernouilli, puis Abraham de Moivre fait apparaître la loi normale comme loi limite de la loi binomiale, au XVIII^{e} *siècle. Pierre-Simon Laplace et Friedrich Gauss poursuivront leurs travaux dans ce sens.*



Les lois étudiées jusqu'à présent (bernouilli, binomiale) sont des lois « discrètes ». Dans ce chapitre, on s'intéresse à des lois « continues », c'est-à dire pour lesquelles la variable aléatoire peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle, on les appelle lois à densité.

1 Loi uniforme sur $[a, b]$

1.1 Définition

on note $X \sim \mathcal{U}[a,b]$

Définition 1.

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi uniforme sur** $[a,b]$ si pour tout intervalle $I = [c,d]$ inclus dans $[a,b]$, la probabilité de l'événement « $X \in I$ » est l'aire du rectangle délimité par la droite d'équation $y = \dfrac{1}{b-a}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = d$. On peut donc écrire aussi :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec} \qquad f(t) = \frac{1}{b-a}$$

f est appelée **densité de la loi uniforme sur** $[a,b]$.

On a alors $\displaystyle\int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_c^d = \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a}$.
Et $\mathrm{P}(X = c) = \mathrm{P}(c \leq X \leq c) = 0$.

Proriété 2.

Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\,a\,,b\,]$, alors

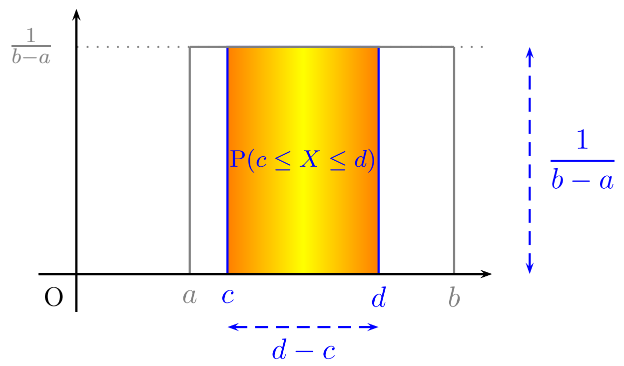
$$\mathrm{P}(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Remarque 3

Pour toute loi continue, pour tout réel c, $\mathrm{P}(X = c) = 0$*, donc :*
$\mathrm{P}(c \leq X \leq d) = \mathrm{P}(c < X \leq d) = \mathrm{P}(c \leq X < d) = \mathrm{P}(c < X < d)$.

Représentation graphique :

on a $P(a \leq X \leq b) = 1$



Cas d'utilisations de la loi uniforme : cette loi modélise un phénomène uniforme sur un intervalle donné. La notion d'uniformité vient du fait que la probabilité qu'une valeur tirée d'une loi uniforme soit dans un certain intervalle ne dépend pas de la position de l'intervalle, mais uniquement de sa longueur.
On l'utilise généralement lorsque la situation se ramène à choisir **au hasard** un réel dans un intervalle $[\,a\,,b\,]$.

Exemple 4

À l'arrêt de bus des papangues, un bus passe toutes les 10 minutes. Un voyageur ignore les horaires et arrive à cet arrêt de bus. Quelle est la probabilité d'attendre le bus exactement 3 minutes ? entre 2 et 4 minutes ? plus de 5 minutes ?

On note T la variable aléatoire représentant le temps d'attente, en minutes. On suppose que T suit la loi uniforme $\mathcal{U}[\,0\,;10\,]$.

- $\mathrm{P}(3 \leq T \leq 3) = \displaystyle\int_3^3 \frac{1}{10-0}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{10}\right]_3^3 = \frac{3-3}{10} = \frac{0}{10} = 0\,;$
- $\mathrm{P}(2 \leq T \leq 4) = \displaystyle\int_2^4 \frac{1}{10-0}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{10}\right]_2^4 = \frac{4-2}{10} = \frac{2}{10} = 0,2\,;$
- *$P(A) = 1 - P(\overline{A})$* $\mathrm{P}(T \geq 5) = 1 - \mathrm{P}(T < 5) = 1 - \dfrac{5}{10} = \dfrac{5}{10} = 0,5.$

`L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet de modéliser une loi uniforme sur` $[\,a\,,b\,]$.

Syntaxes pour obtenir un nombre au hasard entre 0 et 1 :

En anglais, random signifie « hasard »

tableur	TI	casio	AlgoBox	Python
`ALEA()`	`NbrAléat`	`Ran#`	`random()`	`random()`

Pour obtenir un nombre entre a et b, on utilise la syntaxe `=ALEA( )*(b-a)+a`

1.2 Espérance et variance

Définition 5.

cas discrèt :

$\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$

$\sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$

Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[\,a\,,b\,]$, on appelle espérance de X le réel, noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = \int_a^b t f(t)\, dt$$

on appelle variance de X le réel, $V(X)$ défini par

$$V(X) = \int_a^b (t - E(X))^2 f(t)\, dt$$

L'espérance est une valeur numérique permettant d'évaluer le résultat moyen d'une expérience aléatoire.
L'écart-type σ correspond à la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proriété 6.

$E(X)$ correspond au centre de l'intervalle

Si $X \sim \mathcal{U}[\,a\,,b\,]$, l'espérance $E(X)$ et la variance $\sigma(X)$ sont donnés par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Démonstrations :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_a^b t \times \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) \\
&= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 \times \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{b-a} \times \left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b \\
&= \frac{1}{3(b-a)} \times \left(\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3\right) \\
&= \frac{1}{24(b-a)} \times \left((b-a)^3 - (a-b)^3\right) \\
&= \frac{2}{24(b-a)} \times (b-a)^3 \\
&= \frac{1}{12} \times (b-a)^2
\end{aligned}$$

Exemple 7

L'attente moyenne de notre voyageur à l'arrêt de bus des papangues, sera de :
$E(T) = \dfrac{0+10}{2} = 5$ minutes.

L'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{1}{12}} \times (10 - 0) = 1,67$ nous informe sur la manière dont les temps d'attente se répartissent autour de la moyenne.

2 Loi exponentielle

2.1 Définition

on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

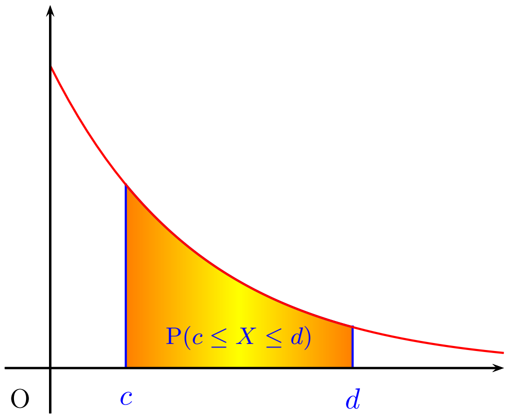
Définition 8.

Soit λ un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire X à valeurs dans $[\,0\,;+\infty\,[$ suit la **loi exponentielle de paramètre** λ, si pour tous réels c et d dans $[\,0\,;+\infty\,[$, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

f est appelée **densité de la loi exponentielle de paramètre** λ.

Représentation graphique :



On a alors $\displaystyle\int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_c^d = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.
Donc, $\mathrm{P}(X \leq t) = \mathrm{P}(0 \leq X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Proriété 9.

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ suit la loi exponentielle de paramètre λ si, et seulement si, pour tout $t \geq 0$,

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Cas d'utilisations de la loi exponentielle : une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant un temps t ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t.
Elle permet entre autres de modéliser la durée de vie de la radioactivité ou d'un composant électronique, de décrire le temps écoulé entre deux moments…

Exemple 10

La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,00005.

On détermine la probabilité que ce composant tombe en panne avant 10 000 heures, qu'il fonctionne au moins 15 000 heures, et qu'il tombe en panne entre la 10 000ᵉ heure et la 15 000ᵉ heure :

- $\mathrm{P}(T < 10000) = \mathrm{P}(T \leq 10000) = 1 - \mathrm{e}^{-0,00005 \times 10000} = 0,40$;
- $\mathrm{P}(T \geq 15000) = 1 - \mathrm{P}(T < 15000) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-0,00005 \times 15000}) = 0,47$;
- $\mathrm{P}(10000 \leq T \leq 15000) = \mathrm{P}(T \leq 15000) - \mathrm{P}(T < 10000) = 0,53 - 0,40 = 0,13$.

$\mathrm{P}(a \leq T \leq b) = \mathrm{P}(T \leq b) - \mathrm{P}(T < a)$

2.2 Espérance

Définition 11.

L'espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par :

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t) \, \mathrm{d}t$$

Proriété 12.

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance $E(X)$ est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Exemple 13

On reprend l'exemple 10 précédent, on calcule :

$E(X) = \dfrac{1}{0,00005} = 20\,000$.

On peut donc en conclure que la durée de vie moyenne du composant électronique est de 20 000 heures.

Partie B (S_{13})

3 Loi normale

3.1 Définition

aussi appelée loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss

Définition 14.

Soit μ et σ deux réels tels que $\sigma > 0$. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi normale**, si pour tous réels c et d, on a :

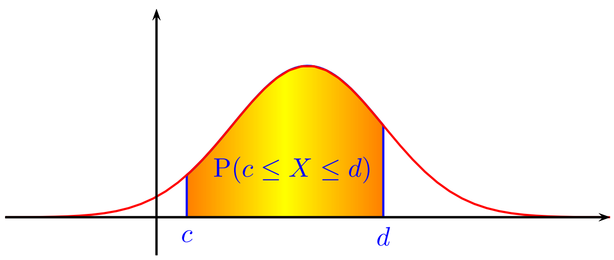
$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

on note $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

f est appelée **densité de la loi normale de paramètre** μ **et** σ.

Représentation graphique :

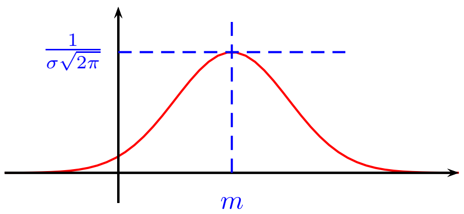
courbe « en cloche »



Proriété 15.

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma)$ alors les paramètres d'une loi normale sont son espérance et son écart-type :

$$E(X) = m \text{ et } \sigma(X) = \sigma.$$



- la courbe admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = m$;
- le maximum de la courbe est atteint en m, espérance de la variable X et vaut $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
- plus σ est grand, plus la courbe « s'étale » autour de m.

`Les syntaxes, avec les calculatrices sont les suivantes :`

Casio 35 : P($a \leq X \leq b$) = `NormCD`(a, b, σ, μ)

TI 82 : P($a \leq X \leq b$) = `normalFrep`(a, b, μ, σ)

Exemple 16

Une entreprise produit en grande quantité des pièces détachées destinées à l'industrie.
Une pièce est conforme lorsque sa longueur (en millimètres) appartient à l'intervalle $[\,74,4\,;75,6\,]$.
On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard, associe sa longueur.
$L \sim \mathcal{N}(\,75\,;0,25\,)$ On suppose que la variable aléatoire L suit la loi normale d'espérance 75 et d'écart type $0,25$. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit conforme ?

On calcule $P(74,4 \leqslant L \leqslant 75,6)$, la calculatrice donne $0,98$.
La pièce est donc conforme dans 98% des cas.

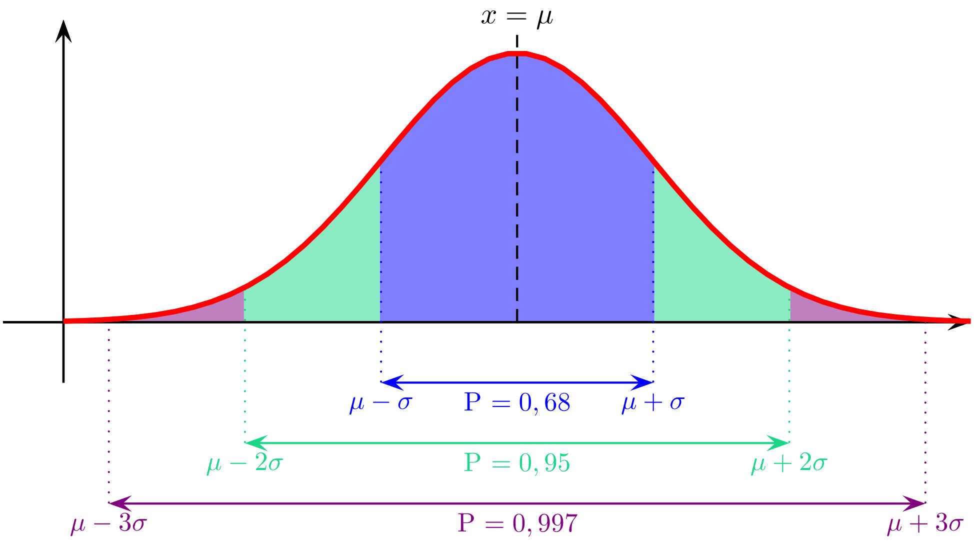
3.2 Intervalles en fonction de σ

Proriété 17.

Si X suit la loi normale de paramètres μ et σ, alors

- $\mathrm{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$;
- $\mathrm{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$;
- $\mathrm{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.

Interprétation graphique :



Exemple 18

On reprend l'exercice 16, quelle valeur doit-on donner à h pour avoir l'égalité :
$P(75 - h \leq L \leq 75 + h) = 0,997$?

On utilise la formule : $\mathrm{P}(\mu - 3\sigma \leq L \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$ et on a :
$\mathrm{P}(75 - 3 \times 0,25 \leq L \leq 75 + 3 \times 0,25) \approx 0,997$ donc, $h = 3 \times 0,25 = 0,75$.

De plus, $\mathrm{P}(74,25 \leq L \leq 75,75) \approx 0,997$, ce qui signifie que quasiment toutes les pièces (99,7 %) ont théoriquement une largeur comprise entre 74,25 mm et 75,75 mm.

3.3 Approximation

loi de Bernoulli et loi binomiale

Rappels : on répète n fois, de façon indépendante, une même expérience aléatoire suivant une loi de **Bernoulli** donnant lieu à deux issues : succès (probabilité p) et échec (probabilité $1-p$).
La variable aléatoire X qui, à cette série de n expériences, associe le nombre de succès suit la loi **binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p.
Son espérance est $E(x) = np$ et son écart-type $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Proriété 19.

La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

On a représenté ci-contre le diagramme en bâtons de la loi de probabilité d'un loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ ainsi que la représentation graphique de la densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$.
On remarque une certaine similitude !

Exemple 20
Un revendeur de matériel photographique désire s'implanter dans une galerie marchande.
Il estime qu'il pourra vendre 40 appareils photo par jour et les ventes sont deux à deux indépendantes. Une étude lui a montré que, parmi les différentes marques disponibles, la marque A réalise 38,6 % du marché.
On note X la variable aléatoire qui, un jour donné, associe le nombre d'appareils de marque A vendus ce jour-là.

- on peut assimiler ces 40 ventes indépendantes à un schéma de Bernoulli où le succès est l'événement « l'appareil de marque A est vendu ». Alors, la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 40$ et $p = 0,386$;
- la probabilité que, sur 40 appareils vendus ce jour, 10 soient de la marque A vaut
  $\mathrm{P}(X = 10) = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \end{pmatrix} \times 0,386^{10} \times 0,614^{30} \approx 0,03$;

  $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$
- l'espérance de X vaut $E(X) = np = 40 \times 0,386 = 15,44$ et son écart type vaut
  $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{40 \times 0,386 \times 0,614} \approx 3,08$;
- on peut approcher cette loi par loi normale de paramètres $\mu = 15,44$ et $\sigma = 3,08$;
- la probabilité de l'événement : « un jour donné, le nombre d'appareils de marque A vendus est compris entre 15 et 25 » vaut $\mathrm{P}(15 \leq Y \leq 25) = 0,56$.