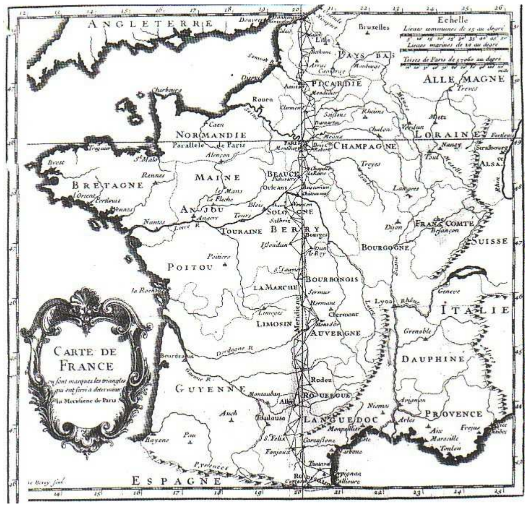
CHAPITRE

8 Produit scalaire

Sommaire

Partie A (S₃)

Le produit scalaire apparaît assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez **Hamilton** *en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions.* **Peano** *le définit associé à un calcul d'aire ou de déterminant.* **Marcolongo** *et* **Burali-Forti** *le définissent à l'aide du cosinus d'un angle et lui donnent le nom de produit intérieur ou produit scalaire.*
C'est un outil puissant de simplification d'expressions trigonométriques dont les applications sont très nombreuses.
En particulier, elle est utilisée en astronomie et en navigation avec notamment la technique de triangulation (technique utilisée par les scientifiques français Méchain et Delambre à la fin du XVIII^e siècle afin de définir le mètre).
On a retrouve également en sciences physiques, élécticité, économie, sciences naturelles, médecine. . .



1 Rappels de première

1.1 Produit scalaire par normes et angle

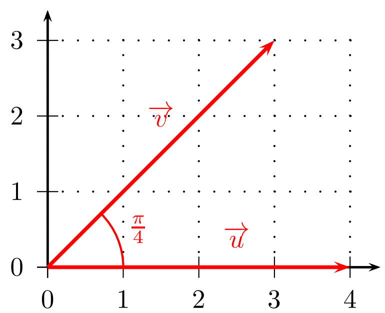
Si $\vec{u}$ ou/et $\vec{v}$ est nul, $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Définition 1.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Exemple 2
On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants dans un repère orthonormé. Déterminons $\vec{u}.\vec{v}$:



- $||\vec{u}|| = 4$
- $||\vec{v}|| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$
- $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45° = \dfrac{\pi}{4}$
- $\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= 4 \times 3\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 12\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 12.\end{aligned}$

1.2 Produit scalaire par projection orthogonale

Proriété 3.

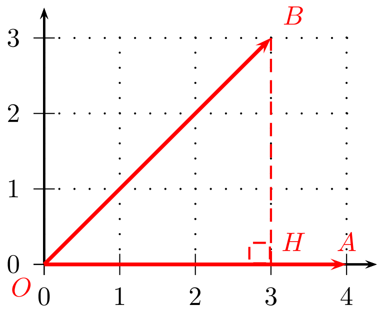
Soient deux points A et B, et H le projeté orthogonal de B sur (OA), alors :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Exemple 4
On reprend l'exemple précédent

- On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OH$
  $= 4 \times 3 = 12$
  $= 12.$

$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens



1.3 Expression analytique du produit scalaire

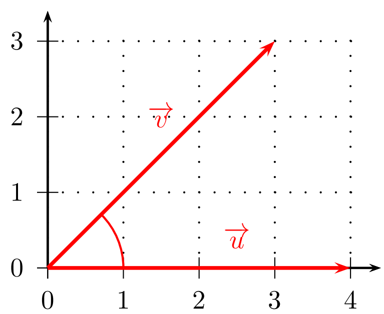
On se place dans un repère orthonormé du plan $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$

Définition 5.

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ le réel défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Exemple 6
On considère toujours les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ suivants :

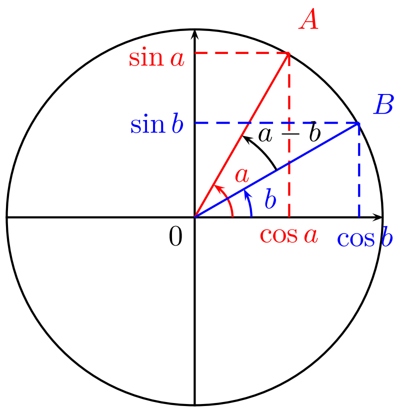


- le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- le vecteur $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$;
- leur produit scalaire vaut :
  $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 4 \times 3 + 0 \times 3 = 12.$

2 Lien produit scalaire-trigonométrie

Soit $\mathcal{C}$, le cercle trigonométrique de centre O muni d'un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$
$A\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$ sont deux points de ce cercle.
On cherche un lien entre $\cos(a-b)$ et le cosinus et le sinus de a et de b.

un cercle trigonométrique a pour rayon 1, donc $OA = OB = 1$



On a d'une part :
$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$
$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = 1 \times 1 \times \cos(a-b)$

Et d'autre part :
$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = x_{\overrightarrow{OB}} \times x_{\overrightarrow{OA}} + y_{\overrightarrow{OB}} \times y_{\overrightarrow{OA}}$
$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos b \times \cos a + \sin b \times \sin a$

D'où :
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

3 Vers la linéarisation

3.1 Formules d'addition

$x \mapsto \cos x$ est paire
$x \mapsto \sin x$ est impaire
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Grâce au produit scalaire et aux propriétés des sinus et cosinus, on obtient finalement les formules d'addition suivantes :

Proriété 7.

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$; $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$; $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Un exemple de démonstration :

$\cos(-b) = \cos b$ et $\sin(-b) = -\sin b$

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a-(-b))\\ &= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)\\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{aligned}$$

Exemple 8
En remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, on peut calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$:

$\sin(a+b) =$ $\sin a \cos a + \cos a \sin a$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)\end{aligned}$$

3.2 Formules de duplication

En choisissant $b = a$, on obtient les formules de duplication :

Proriété 9.

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

Un exemple de démonstration :

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a+a)\\ &= \cos a \cos a - \sin a \sin a\\ &= \cos^2 a - \sin^2 a\\ &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)\\ &= 2\cos^2 a - 1\end{aligned}$$

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

Exemple 10

En remarquant que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, calculons la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

$$\begin{aligned}& \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1\\ \iff & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1\\ \iff & \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1\\ \iff & \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2}\\ \iff & \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}\end{aligned}$$

3.3 Linéarisation

Linéariser une fonction trigonométrique, c'est la transformer en une combinaison linéaire de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, k avec k un nombre réel.
Lorsque la fonction est du second degré, on utilise les formules de linéarisation suivantes :

Proriété 11.

$$\cos^2 a = \frac{\cos 2a + 1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Exemple 12

wxMaxima : `trigreduce (4*(sin(3*x))^2);`

La linéarisation de $4\sin^2(3x)$ est $4 \times \frac{1 - \cos(2 \times 3x)}{2}$
D'où, $4\sin^2(3x) = 2(1 - \cos 6x)$.