CHAPITRE

1 Suites numériques

Sommaire

Partie A (s2)

La notion de suite est indissociable des procédures itératives utilisées dès l'Antiquité, notamment chez le scientifique grec **Archimède de Syracuse** *pour trouver des approximations de nombres irrationnels comme π ou de grandeurs à mesurer : surfaces, volumes...*
À partir du XVIII^{e} *siècle, les suites deviennent un outil incontesté pour la détermination de valeurs approchées de valeurs numérique. De nos jours, les ordinateurs permettent des approximations de plus en plus fines.*
La théorie des suites fournit un cadre de modélisation dans de nombreux domaines : en économie, biologie, écologie, physique...

Archimède (-287 ;-212)

1 Rappels de première

Définition 1.

Une **suite** de réels est une liste ordonnée de nombres réels indexée par les entiers naturels.
On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0; u_1; u_2; \dots; u_{k-1}; u_k; u_{k+1}; \dots)$

Exemple 2
Vous avez certainement déjà vu ce genre de défi où il faut continuer la suite :

- 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,... suite géométrique de raison 2
- 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,... suite des carrés
- -3, 1, 5, 9, 13, 17, 21,... suite arithmétique de raison 4
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... suite de Fibonacci

Voir vidéo Késako sur le nombre d'or

Définition 3.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de manière **explicite** lorsque chaque terme u_n est défini en fonction de son rang n, indépendamment des autres termes :

$$u_n = f(n) \qquad \text{où } f \text{ désigne une fonction.}$$

Une telle expression permet de calculer n'importe quel terme de la suite.

Exemple 4
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 7n - 5$.

ici, $f : x \to 7x - 5$

- $u_0 = 7 \times 0 - 5 = -5$;
- $u_1 = 7 \times 1 - 5 = 2$;
- $u_{2014} = 7 \times 2\,014 - 5 = 14\,093$.

Définition 5.

Cette relation de récurrence permet de calculer un terme de la suite à partir du terme précédent.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie **par récurrence** lorsque l'on connait son premier terme et une relation de la forme :

$$u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{où } f \text{ désigne une fonction.}$$

Exemple 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & -2u_n+1 \end{cases}$.

- $u_1 = -2u_0 + 1 = -2\times 3 + 1 = -5$;
- $u_2 = -2u_1 + 1 = -2\times(-5) + 1 = 11\ldots$

L'inconvénient d'une telle suite est que les termes « éloignés » du début de la suite sont difficiles d'accès : pour calculer u_{100} il faut, a priori, calculer tous les termes précédents !!

`Pour calculer les termes d'une suite, on peut utiliser un tableur, un logiciel de géométrie dynamique ou logiciel de programmation.`

2 Limite d'une suite

Quel est le comportement d'une suite (u_n) lorsque n prend de grandes valeurs ?

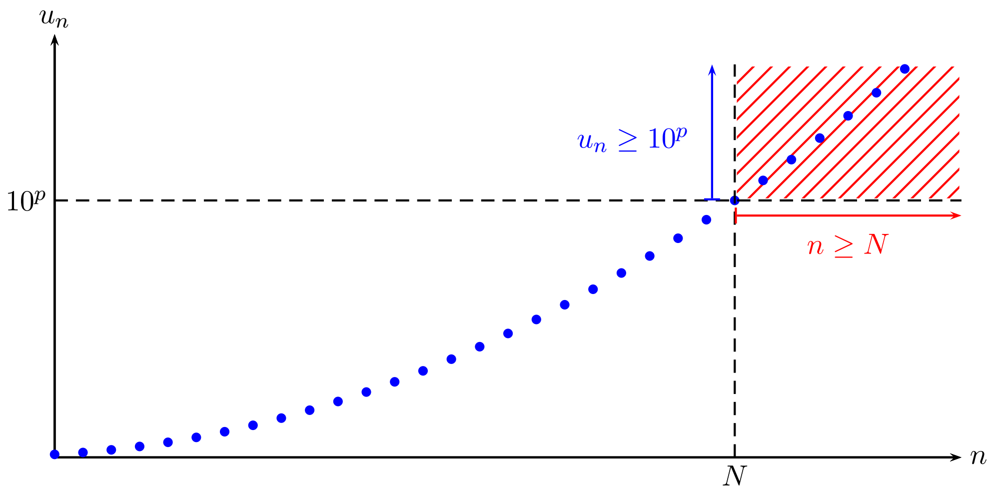
$$\text{On écrit : } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ ?$$

2.1 limite infinie

Définition 7.

On dit qu'une suite (u_n) a pour **limite** $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout entier naturel p, on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à 10^p. On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$



Exemple 8

Soit u la suite définie par $u_n = 0,5n^2 - n + 1$.
On admet que cette suite admet une limite infinie en $+\infty$.
Mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel $u_n \geq 10\,000$, soit $u_n \geq 10^5$.

Un algorithme est une suite finie d'instructions permettant de résoudre un problème. Le mot algorithme vient du nom du mathématicien perse Al-Khwarizmi (années 800) surnommé le père de l'algèbre

Algorithme `Seuil pour une limite infinie`

Variable

- `n` : *un nombre entier naturel* { *indice de la suite* }
- `u` : *un nombre réel* { *valeur de la suite au rang n* }

Début

- `Affecter à` n `la valeur` 0
- `Affecter à` u `la valeur` $0,5n^2 - n + 1$ { *ou directement 1* }
- **TantQue** u `est inférieur à` $10\,000$ **Faire**
  - `Affecter à` n `la valeur` $n+1$ { *incrémentation de 1* }
  - `Affecter à` u `la valeur` $0,5n^2 - n + 1$ { *nouvelle valeur de u* }
- **FinTantQue**
- `Afficher` n

Fin

On peut tester cet algorithme grâce à un logiciel ou une calculatrice.

`Voici ce que cela donne avec AlgoBox :`

```
VARIABLES
   n EST_DU_TYPE NOMBRE
   u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   n PREND_LA_VALEUR 0
   u PREND_LA_VALEUR 0.5*n*n-n+1
   TANT_QUE (u<10000) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
         n PREND_LA_VALEUR n+1
         u PREND_LA_VALEUR 0.5*n*n-n+1
      FIN_TANT_QUE
   AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

`et avec Python :`

```python
n=0
u=1
while u>10000:
     n=n+1
     u=0.5*n*n-n+1
print(n)
```

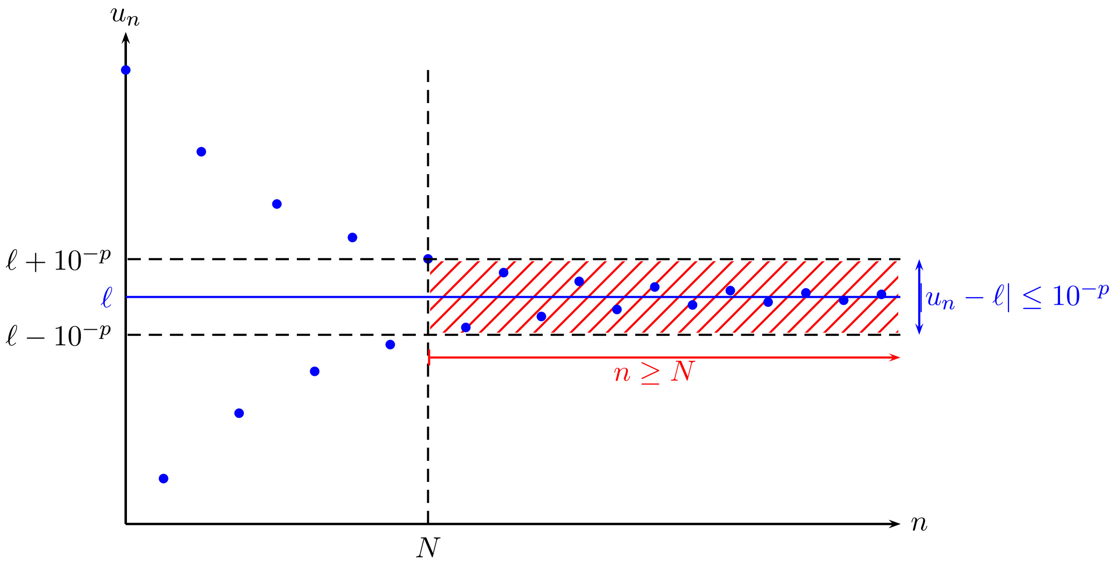
L'algorithme nous donne un seuil de 143, c'est à dire que pour toute valeur de n supérieure ou égale à 143, u_n sera supérieur ou égale à 10^5.

2.2 limite finie

Définition 9.

On dit qu'une suite (u_n) a pour **limite** ℓ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout entier naturel p, on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes u_n sont à une distance de ℓ inférieure à 10^p. On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$



Exemple 10

Soit u la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ pour .
On admet que cette suite admet pour limite 3 en $+\infty$.
Mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel $|u_n - 3| \leq 0,00001$, soit $|u_n - 3| \leq 10^{-5}$.

Algorithme `Seuil pour une limite finie`

Variable

Variables
- `n` : *un nombre entier naturel*
- `u` : *un nombre réel*

Début

Initialisation
- `Affecter à` n `la valeur` 1
- `Affecter à` u `la valeur` $3 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

Traitement
- **TantQue** $|u - 3|$ `est supérieur à` $0,00001$ **Faire**
  - `Affecter à` n `la valeur` $n+1$
  - `Affecter à` u `la valeur` $3 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}$
- **FinTantQue**

Sortie
- `Afficher` n

Fin

Voici ce que cela donne avec AlgoBox :

la syntaxe pour a^b est `pow(a,b)`

```
VARIABLES
   n EST_DU_TYPE NOMBRE
   u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   n PREND_LA_VALEUR 1
   u PREND_LA_VALEUR 3+pow(-1,n)/pow(n,2)
   TANT_QUE (ABS(u-3)>0,00001) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
         n PREND_LA_VALEUR n+1
         u PREND_LA_VALEUR 3+pow(-1,n)/pow(n,2)
      FIN_TANT_QUE
   AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

et avec Python :

```
n=1
u=2
while abs(u-3)>0.00001:
     n=n+1
     u=3+pow(-1,n)/pow(n,2)
print(n)
```

L'algorithme nous donne un seuil de 317, c'est à dire que pour toute valeur de n supérieur ou égale à 317, la différence entre u_n et 3 sera inférieure à $0,00001$.

Remarque 11

Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Elle n'admet pas de limite.

Partie B (s_{14})

3 Suites géométriques

3.1 Rappels de première

Définition 12.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** s'il existe un réel q non nul appelé **raison** de la suite tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Autrement dit, on passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant toujours par le même nombre q.

Exemple 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ de raison $q = -2$.

La définition de la suite $(u_n)_{n\in N}$ par récurrence est $\left\{\begin{array}{ccc} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & -2u_n \end{array}\right.$:

- $u_1 = -2u_0 = -2 \times 5 = -10$;
- $u_2 = -2u_1 = -2 \times (-10) = 20\ldots$

Propriété 14.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 de raison q,

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$,
- Pour tous $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

si $p = 0$, on retrouve la formule précédente

Exemple 15

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ de raison $q = -2$, le terme de rang 4 est : $u_4 = 5 \times (-2)^4 = 80$.

3.2 Somme des termes

Propriété 16.

La somme des $(n + 1)$ premières puissances d'un nombre $q \neq 1$ est :

$$S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

on lit somme pour i allant de 1 à n des q^i

Remarque 17
Pour simplifier l'écriture, on note $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.

Démonstration :

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
1 & + & \cancel{q} & + & \cancel{q^2} & + & \dots & + & \cancel{q^n} & & & = & S \\
- & & \cancel{q} & + & \cancel{q^2} & + & \dots & + & \cancel{q^n} & + & q^{n+1} & = & qS \\
\hline
1 & & & & & & & & & - & q^{n+1} & = & S - qS \quad = \quad S(1-q)
\end{array}$$

d'où le résultat attendu : $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

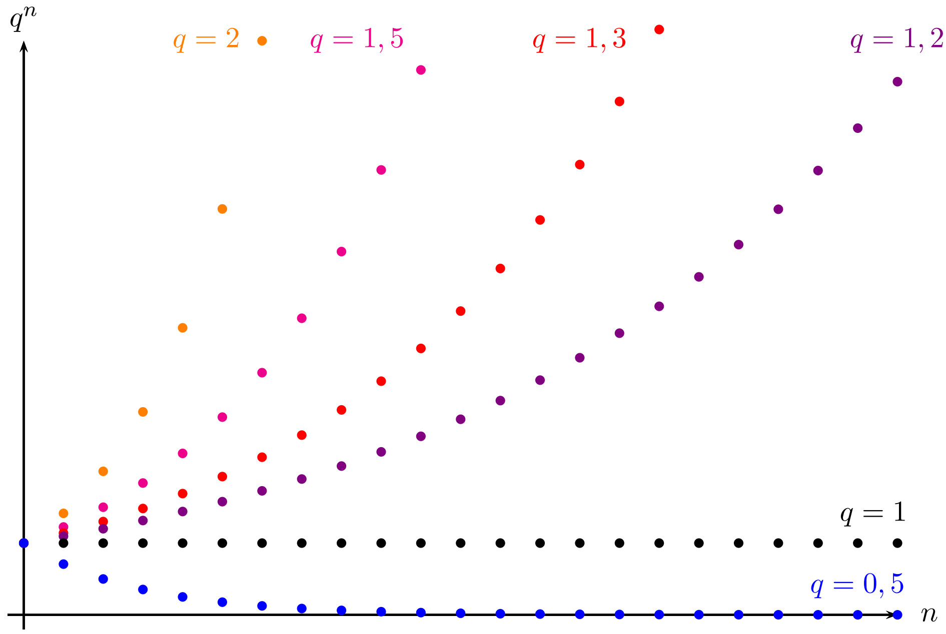
Exemple 18
La somme des 9 premières puissances de 2 vaut $S = 1 + 2 + 2^2 \ldots + 2^8 = \dfrac{1-2^{8+1}}{1-2} = 511$.

3.3 Limite

le cas $q = 1$ est trivial car $q^n = 1 \, \forall \, n$

Propriété 19.

Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, et si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.



Une suite géométrique peut également être définie ainsi :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$, on a donc les propriétés suivantes.

Propriété 20.

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q > 0$.

- si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;
- si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et égale à u_0 ;
- si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si $u_0 < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $u_0 > 0$.