

CHAPITRE

1

SUITES NUMÉRIQUES

Sommaire

Partie A (s2)	2
1 Rappels de première.....	2
2 Limite d'une suite.....	3
2.1 limite infinie	3
2.2 limite finie	5

Partie A (s₂)

La notion de suite est indissociable des procédures itératives utilisées dès l'Antiquité, notamment chez le scientifique grec **Archimède de Syracuse** pour trouver des approximations de nombres irrationnels comme π ou de grandeurs à mesurer : surfaces, volumes...

À partir du XVIII^e siècle, les suites deviennent un outil incontesté pour la détermination de valeurs approchées de valeurs numérique. De nos jours, les ordinateurs permettent des approximations de plus en plus fines.

La théorie des suites fournit un cadre de modélisation dans de nombreux domaines : en économie, biologie, écologie, physique...



Archimède (-287;-212)

1 Rappels de première

Définition 1.

Une **suite** de réels est une liste ordonnée de nombres réels indexée par les entiers naturels.

On note $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_0; u_1; u_2; \dots; u_{k-1}; u_k; u_{k+1}; \dots)$

Exemple 2

Vous avez certainement déjà vu ce genre de défi où il faut continuer la suite :

- 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... suite géométrique de raison 2
- 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... suite des carrés
- -3, 1, 5, 9, 13, 17, 21, ... suite arithmétique de raison 4
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... suite de Fibonacci

Voir vidéo Késako sur le nombre d'or

Définition 3.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie de manière **explicite** lorsque chaque terme u_n est défini en fonction de son rang n , indépendamment des autres termes :

$$u_n = f(n) \quad \text{où } f \text{ désigne une fonction.}$$

Une telle expression permet de calculer n'importe quel terme de la suite.

Exemple 4

ici, $f : x \rightarrow 7x - 5$ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 7n - 5$.

- $u_0 = 7 \times 0 - 5 = -5$;
- $u_1 = 7 \times 1 - 5 = 2$;
- $u_{2014} = 7 \times 2014 - 5 = 14\,093$.

Cette relation de récurrence permet de calculer un terme de la suite à partir du terme précédent.

Définition 5.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie **par récurrence** lorsque l'on connaît son premier terme et une relation de la forme :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où } f \text{ désigne une fonction.}$$

Exemple 6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -2u_n + 1 \end{cases}$

- $u_1 = -2u_0 + 1 = -2 \times 3 + 1 = -5$;
- $u_2 = -2u_1 + 1 = -2 \times (-5) + 1 = 11 \dots$

L'inconvénient d'une telle suite est que les termes « éloignés » du début de la suite sont difficiles d'accès : pour calculer u_{100} il faut, a priori, calculer tous les termes précédents!!



Pour calculer les termes d'une suite, on peut utiliser un tableur, un logiciel de géométrie dynamique ou logiciel de programmation.

2 Limite d'une suite

Quel est le comportement d'une suite (u_n) lorsque n prend de grandes valeurs ?

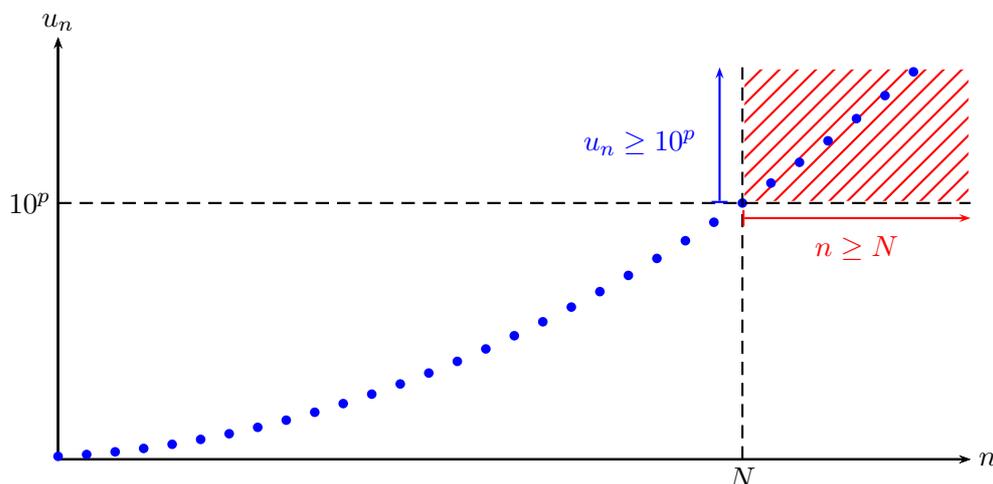
$$\text{On écrit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = ?$$

2.1 limite infinie

Définition 7.

On dit qu'une suite (u_n) a pour **limite** $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout entier naturel p , on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à 10^p . On écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$



Exemple 8 

Soit u la suite définie par $u_n = 0,5n^2 - n + 1$.

On admet que cette suite admet une limite infinie en $+\infty$.

Mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel $u_n \geq 10\,000$, soit $u_n \geq 10^5$.

Algorithme Seuil pour une limite infinie**Variable**

n : un nombre entier naturel { *indice de la suite* }

u : un nombre réel { *valeur de la suite au rang n* }

Début

Affecter à n la valeur 0

Affecter à u la valeur $0,5n^2 - n + 1$ { *ou directement 1* }

TantQue u est inférieur à 10000 **Faire**

 Affecter à n la valeur $n + 1$ { *incréméntation de 1* }

 Affecter à u la valeur $0,5n^2 - n + 1$ { *nouvelle valeur de u* }

FinTantQue

Afficher n

Fin

Un algorithme est une suite finie d'instructions permettant de résoudre un problème. Le mot algorithme vient du nom du mathématicien perse Al-Khwarizmi (années 800) surnommé le père de l'algèbre

On peut tester cet algorithme grâce à un logiciel ou une calculatrice.



Voici ce que cela donne avec AlgoBox :

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  u PREND_LA_VALEUR 0.5*n*n-n+1
  TANT_QUE (u<10000) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
      n PREND_LA_VALEUR n+1
      u PREND_LA_VALEUR 0.5*n*n-n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

et avec Python :

```
n=0
u=1
while u>10000:
    n=n+1
    u=0.5*n*n-n+1
print(n)
```

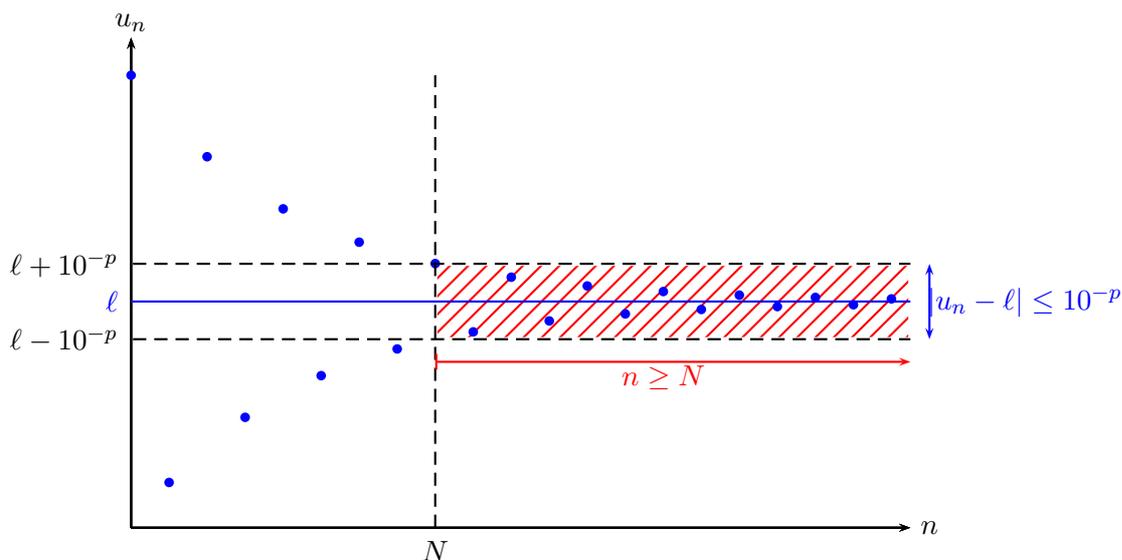
L'algorithme nous donne un seuil de 143, c'est à dire que pour toute valeur de n supérieure ou égale à 143, u_n sera supérieur ou égale à 10^5 .

2.2 limite finie

Définition 9.

On dit qu'une suite (u_n) a pour **limite** ℓ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout entier naturel p , on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes u_n sont à une distance de ℓ inférieure à 10^p . On écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$



Exemple 10

Soit u la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n^2}$ pour .

On admet que cette suite admet pour limite 3 en $+\infty$.

Mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel $|u_n - 3| \leq 0,00001$, soit $|u_n - 3| \leq 10^{-5}$.

Algorithme Seuil pour une limite finie

Variable

Variables

n : un nombre entier naturel
 u : un nombre réel

Début

Initialisation

Affecter à n la valeur 1
 Affecter à u la valeur $3 + \frac{(-1)^n}{n^2}$

TantQue $|u - 3|$ est supérieur à 0,00001 **Faire**

Traitement

Affecter à n la valeur $n + 1$
 Affecter à u la valeur $3 + \frac{(-1)^n}{n^2}$

FinTantQue

Sortie

Afficher n

Fin



Voici ce que cela donne avec AlgoBox :

la syntaxe pour a^b
est `pow(a,b)`

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 1
  u PREND_LA_VALEUR 3+pow(-1,n)/pow(n,2)
  TANT_QUE (ABS(u-3)>0,00001) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
      n PREND_LA_VALEUR n+1
      u PREND_LA_VALEUR 3+pow(-1,n)/pow(n,2)
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

et avec Python :

```
n=1
u=2
while abs(u-3)>0.00001:
    n=n+1
    u=3+pow(-1,n)/pow(n,2)
print(n)
```

L'algorithme nous donne un seuil de 317, c'est à dire que pour toute valeur de n supérieur ou égale à 317, la différence entre u_n et 3 sera inférieure à 0,00001.

Remarque 11

Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1 . Elle n'admet pas de limite.