Exercice 1 **(Propriétés du logarithme - numérique)**

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(6) - \ln(2)$
2. $\ln(3) - \ln(9)$
3. $\ln(2) + \ln(4) - \ln(8)$
4. $\ln(2) + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$
5. $\dfrac{1}{4}\ln(81)$
6. $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2\ln\left(\sqrt{3}\right)$
7. $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$

Exercice 2 **(Propriétés du logarithme - numérique - bis)**

Donner, en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(5)$ les valeurs de :

1. $\ln(10)$
2. $\ln(25)$
3. $\ln(16)$
4. $\ln(400)$
5. $\ln\left(\dfrac{2}{25}\right)$
6. $\ln\left(\dfrac{5}{8}\right)$
7. $\ln(0,4)$
8. $\ln\left(\sqrt{5}\right)$
9. $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$
10. $\ln\left(5\sqrt{10}\right)$

Exercice 3 **(Avec le nombre d'Euler...)**

Donner la valeur numérique des nombres ci-dessous :

1. $\ln \mathrm{e}^2$
2. $\ln \dfrac{1}{e}$
3. $\ln \sqrt{\mathrm{e}}$
4. $\ln \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$
5. $2\ln \mathrm{e}^3$
6. $\ln \mathrm{e}^2 + \ln \dfrac{1}{e^4}$

Exercice 4 **(Propriétés du logarithme - algébrique)**

x et y étant deux réels strictement positifs, donner en fonction de $\ln(x)$ et de $\ln(y)$ les valeurs de :

1. $\ln\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$
2. $\ln\left(x^3 \times y^5\right)$
3. $\ln\left(xy^3\right)$
4. $\ln\left(\dfrac{y^2}{x^3}\right)$
5. $\dfrac{\ln(x)}{\ln\left(xy^2\right)}$

Exercice 5 **(Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln x$)**

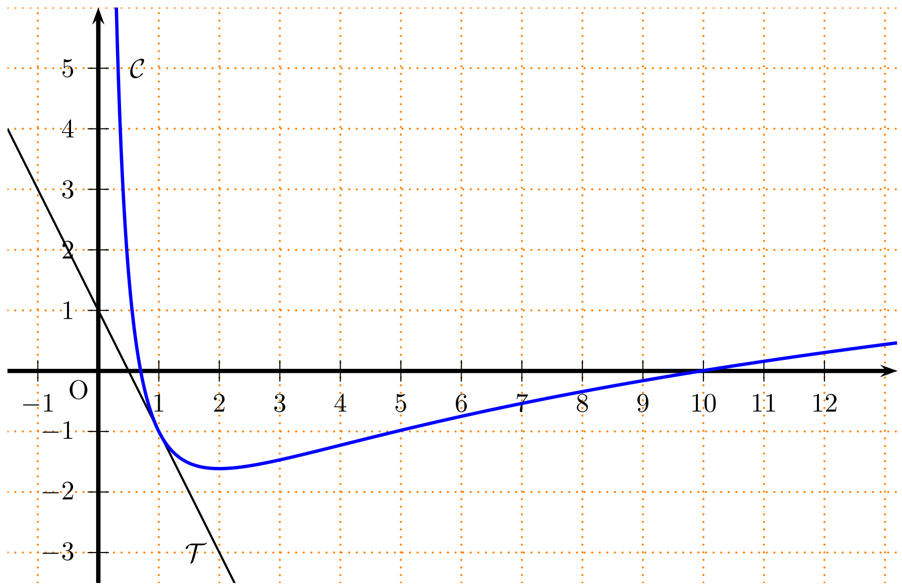
Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur I par :

1. $f(x) = 3\ln x + x\,;\ I =]\,0, +\infty\,[$
2. $f(x) = (x+1)\ln x\,;\ I =]\,0, +\infty\,[$
3. $f(x) = x^3 - 2\ln x\,;\ I =]\,0, +\infty\,[$
4. $f(x) = (\ln x)^5\,;\ I =]\,0, +\infty\,[$
5. $f(x) = 2 - \dfrac{1}{\ln x}\,;\ I =]\,0, 1\,[$
6. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}\,;\ I =]\,0, +\infty\,[$
7. $f(x) = \dfrac{3\ln x + 1}{\ln x}\,;\ I =]\,1, +\infty\,[$

Exercice 6 **(Comme au bac : Ex3 Nouvelle Calédonie 2013)**

PARTIE A :

f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. f' désigne la fonction dérivée de f.



$\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.
$\mathcal{T}$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point de coordonnées $(1\,;\,-1)$.
$\mathcal{T}$ passe par le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

1. (a) Par lecture graphique, déterminer $f(1)$.
   (b) Déterminer $f'(1)$.
   (c) Donner une équation de $\mathcal{T}$.
2. On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = 2\ln x + \dfrac{a}{x} + b$ où a et b sont des nombres réels.
   (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Déterminer alors les valeurs de a et b.

PARTIE B :

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2\ln x + \dfrac{4}{x} - 5$.

1. (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   (b) On admet que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

2. (a) Pour tout nombre réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, vérifier que $f'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2}$.

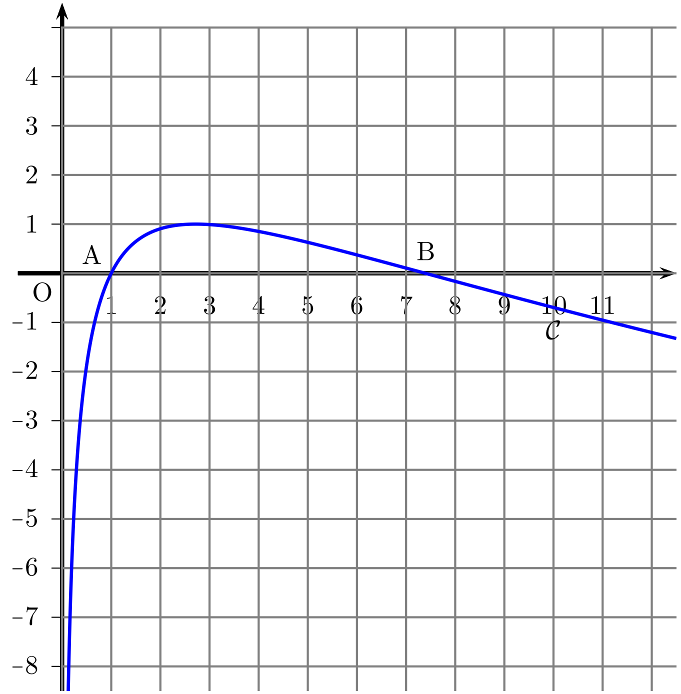
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Établir le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

4. En précisant votre démarche, donner le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$, pour x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 7 (Ex4 Ant 06-14)

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (2 - \ln x)\ln x$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal est donnée ci-dessous :



1. Lire sur le graphique la limite de la fonction f en 0. Retrouver ce résultat à l'aide de l'expression de $f(x)$.
2. Montrer que la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ est définie par $f'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{x}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x est dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ puis donner les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. (a) On appelle A et B les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses (Voir le graphique).
   Calculer les abscisses des points A et B.

   (b) Calculer le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A. Tracer la droite $\mathcal{T}$ sur le graphique donné en annexe.