Exercice 1 (Calcul de primitives)

Déterminer les primitives des fonctions données, définies sur I.

1. $f(x) = x^5 \quad ; \quad I = \mathbb{R}$
2. $g(t) = t^7 \quad ; \quad I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^4} \quad ; \quad I = \mathbb{R}_+^*$
4. $u(t) = t^3 - 3t + 4 \quad ; \quad I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = x^6 + x^3 - x \quad ; \quad I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = 3x^2 - 5x^3 + \pi x \quad I = \mathbb{R}$
7. $f(x) = \sin(4x) \quad ; \quad I = \mathbb{R}$
8. $f(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} \quad ; \quad I = \mathbb{R}_+^*$
9. $f(x) = (2x+1)(x^2 + x - 7)^3$
10. $g(x) = \dfrac{-2}{3x^5} + \dfrac{4}{3x^2} \quad ; \quad I = \mathbb{R}_+^*$
11. $f(t) = -3\cos(3t-2) \quad ; \quad I = \mathbb{R}$
12. $f(x) = (x+1)^4 \quad ; \quad I = \mathbb{R}$
13. $h(t) = \cos(x)\sin(x)^2 \quad I = \mathbb{R}$

Exercice 2 (Primitives uniques)

Dans chaque cas, déterminer la primitive F de f sur I qui vérifie la condition donnée.

1. $f(x) = \cos(x) \quad ; \quad F(0) = 1 \quad ; \quad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} \quad ; \quad F(1) = 2 \quad ; \quad I = \mathbb{R}_+^*$
3. $f(t) = \cos\left(3t + \dfrac{\pi}{6}\right) \quad ; \quad F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = 3x^2(x^3+2) \quad ; \quad F(-1) = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad I = \mathbb{R}$

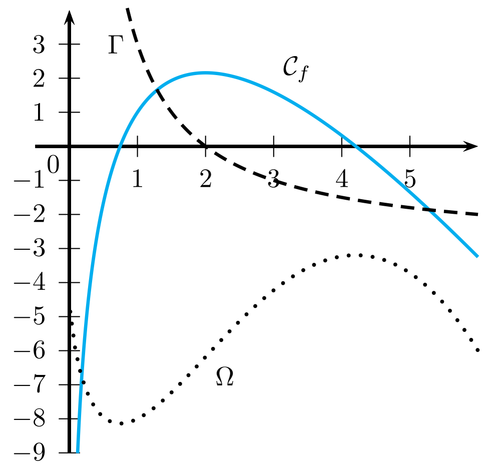
Exercice 3 (Primitives uniques)

Soit f la fonction définie sur $]-3;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b, que l'on déterminera, tels que, pour tout x de $]-3;+\infty[$, $f(x) = a + \dfrac{b}{(x+3)^2}$.
2. En déduire les primitives de f sur $]-3;+\infty[$.
3. Déterminer la primitive F_0 de f sur $]-3;+\infty[$ qui vérifie $F_0(0) = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 4 (Exercice du bac STI2D Polynésie 2014)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 6\ln x + ax + b$ où a et b sont des constantes réelles. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (O, I, J).
Le point A$(1\,;\,1)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 2.



PARTIE A

Sur le graphique ci-contre, on a tracé $\mathcal{C}_f$ (trait plein) ainsi que les courbes Γ et Ω.
L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f et l'autre représente une primitive F de f.

1. Indiquer laquelle des deux courbes est la représentation graphique de F.
2. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$ et $f'(2)$.
3. Donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de a.
4. à l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $[f(x) = 6\ln x - 3x + 4$.

PARTIE B

Dans cette partie, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec la courbe $\mathcal{C}_f$ fournie dans la partie A.

1. Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{3}{x}(2-x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner les variations de la fonction f.
4. En déduire que la fonction f admet un extremum dont on calculera la valeur exacte.

PARTIE C

Soit H la fonction définie sur $]\,0;\,+\infty[$ par : $H(x) = 6x\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 - 2x$.

1. Montrer que H est une primitive de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Calculer la valeur exacte de $I = H(e) - H(1)$ puis en donner une interprétation graphique.
3. (a) à l'aide du graphique, donner la valeur de $F(1)$.
   (b) En déduire une expression de $F(x)$ pour tout x dans l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.