∽ Baccalauréat STI2D et STL spécialité SPCL Antilles-Guyane ∾ 16 juin 2017

EXERCICE 1 **(4 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Pour répondre, vous recopierez sur votre copie le numéro de la question et indiquerez la seule réponse choisie.

Dans cet exercice, i *désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument* $\frac{\pi}{2}$.

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{7}{5}u_n$.

La limite quand n tend vers $+\infty$ de (u_n) est :

a. 0 **b.** $-\infty$ **c.** $+\infty$ **d.** -3

2. On considère la suite géométrique (v_n) définie par son premier terme $v_0 = \frac{1}{4}$ et sa raison $q = \frac{3}{2}$.

La valeur exacte du terme v_{10} est égale à :

a. 14,4 **b.** $7,3 \times 10^{-4}$ **c.** $\frac{59\,049}{4\,096}$ **d.** $\frac{15}{4}$

3. On considère le nombre complexe $z = \sqrt{3} - 5\text{i}$.

Le nombre complexe $z\overline{z}$ est égal à :

a. $3 - 25\text{i}$ **b.** $\left(-\sqrt{3} + 5\text{i}\right)\left(\sqrt{3} - 5\text{i}\right)$ **c.** -28 **d.** 28

4. Le nombre a est un réel strictement positif.

Le nombre complexe $z = a + \text{i}a\sqrt{3}$ admet pour forme exponentielle :

a. $\text{e}^{\text{i}\frac{a\pi}{3}}$ **b.** $a\text{e}^{\text{i}\frac{2a\pi}{3}}$ **c.** $2a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ **d.** $2a\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$

EXERCICE 2 **(7 points)**

En 1648, Blaise Pascal a demandé à son beau-frère Florin Périer de mesurer la hauteur de mercure dans deux baromètres, l'un situé à Clermont-Ferrand et l'autre en haut de la montagne la plus proche, le Puy-de-Dôme.

Florin Périer a constaté que la hauteur de mercure dans le baromètre situé en haut du Puy-de-Dôme était inférieure à la hauteur de mercure dans le baromètre situé plus bas, à Clermont-Ferrand.

Cette expérience a permis de montrer que la pression atmosphérique diminue lorsque l'altitude augmente.

Dans cet exercice, la pression atmosphérique est exprimée en hectopascal (hPa).

On rappelle que la pression atmosphérique vaut 1 013,25 hPa *au niveau de la mer.*

Partie A : Une règle simplifiée

Pour évaluer la pression atmosphérique, les alpinistes utilisent la règle simplifiée suivante : « la pression atmosphérique diminue de 0,11 hectopascal quand l'altitude augmente de 1 mètre ».

1. Recopier et compléter le tableau suivant en utilisant cette règle :

altitude(en mètre)	0	800	1 500	2 000
pression atmosphérique (en hPa)	1 013,25			

2. Pour tout entier naturel n, on note u_n la pression atmosphérique en hPa à l'altitude de n mètres calculée avec la règle simplifiée.

Ainsi $u_0 = 1\,013{,}25$.

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Justifier que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

c. On admet que pour tout entier naturel $n,\ u_n = u_0 - 0{,}11n$.
En déduire l'altitude, exprimée en mètre, à partir de laquelle la pression atmosphérique est inférieure à 950 hPa.

Partie B : La formule barométrique

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,12y = 0$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' est la fonction dérivée de y.
Pour de faibles valeurs de l'altitude, les scientifiques ont démontré que la fonction f qui, à l'altitude x **en kilomètre**, associe la pression atmosphérique en hectopascal est la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 1\,013{,}25$.

1. **a.** Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

   b. Démontrer que la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1013,25$ est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 1\,013{,}25\mathrm{e}^{-0{,}12x}$$

2. En utilisant la fonction f :

   a. Calculer une valeur approchée à $0,01$ près de la pression atmosphérique à 150 mètres d'altitude.

   b. Calculer l'altitude, arrondie au mètre, correspondant à une pression atmosphérique de 900 hPa.

3. On pose $v_n = f(n)$, pour tout entier naturel n. Justifier qu'avec ce modèle, la suite (v_n) est géométrique.

Partie C : La formule du nivellement barométrique

La formule de la partie B ne tient pas compte des changements de température et ne peut donc être utilisée que pour de faibles altitudes.
Pour des altitudes plus élevées, on utilise la fonction p qui à l'altitude x **en kilomètre** associe la pression atmosphérique en hPa :

$$p(x) = 1013,25\left(1 - \frac{6,5x}{288,15}\right)^{5{,}255}$$

1. Calculer la pression atmosphérique (en hPa, arrondie à l'unité) au sommet de l'Everest dont l'altitude est 8 848 mètres.

2. Recopier et compléter l'algorithme suivant en utilisant la fonction p, de façon à ce qu'il affiche en sortie l'altitude (estimée à 100 mètres près) à partir de laquelle la pression atmosphérique est inférieure à 400 hPa.

Variables
A un nombre réel
P un nombre réel
Début
A prend la valeur 0
P prend la valeur 1 013,25
Tant que … **faire**
A prend la valeur $A + 0,1$
P prend la valeur …
Fin tant que
Afficher …
Fin

EXERCICE 3 **(4 points)**

Dans cet exercice, ln désigne la fonction logarithme népérien et l'unité de longueur est le mètre (m).
Un ingénieur prépare un plan pour fabriquer la voile d'un petit bateau.
La voile est représentée en gris dans le repère orthonormé ci-dessous où une unité représente un mètre.

$\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0,1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 12 + ax^2 + \ln(x).$$

où a est un nombre réel qui sera déterminé dans la partie A.

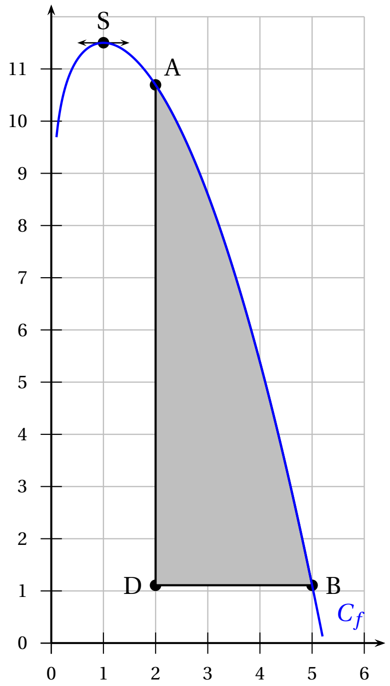
S est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1.

A est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2.

B est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 5.

D est le point d'intersection de la droite d'équation $x = 2$ et de la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B.

La voile est représentée par le domaine délimité par le segment [AD], le segment [DB] et la courbe $\mathcal{C}_f$.



Partie A

La fonction f' désigne la fonction dérivée de f.

1. On suppose que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point S est horizontale.
   Que vaut $f'(1)$?
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0,1\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Exprimer $f'(1)$ en fonction de a.
   b. Démontrer que $a = -0,5$.

Partie B

1. Montrer que la fonction F définie sur $[0,1\,;\,+\infty[$ par

$$F(x) = 11x - \frac{1}{6}x^3 + x\ln(x)$$

   est une primitive de f sur $[0,1\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Calculer la valeur exacte, exprimée en unité d'aire, de l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 5$.
   b. Vérifier qu'une valeur approchée de cette aire, arrondie au dixième, est $20,2\,\text{m}^2$.
3. Cette voile doit être légère tout en étant suffisamment résistante. Elle est fabriquée dans un tissu ayant une masse de 260 grammes par mètre carré.
   La voile pèsera-t-elle moins de 5 kg ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 **(5 points)**

Dans cet exercice, les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3}, sauf indication contraire.

Partie A

Pour dépister les maladies de la glande thyroïde chez un patient, on mesure le taux d'une hormone appelée TSH.
Un médecin étudie les dossiers médicaux des patients de son hôpital.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à un dossier pris au hasard dans cet hôpital, associe le taux de TSH du patient correspondant.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 2{,}2$ et d'écart type $\sigma = 0{,}9$.

1. Déterminer $p(X < 3)$.

2. Déterminer la probabilité qu'un dossier médical pris au hasard dans cet hôpital présente un taux de TSH compris entre $1,5$ et $3,5$.

3. Pour les dossiers médicaux dont le taux de TSH est supérieur à 4, les médecins prescrivent des examens complémentaires au patient.

Déterminer la probabilité qu'un dossier médical pris au hasard dans cet hôpital corresponde à un patient qui nécessite des examens complémentaires.

Partie B

En 2012, l'Agence Nationale de Sécurité du Médicament (ANSM) s'est inquiétée de la forte augmentation des ventes du médicament qui traite l'hypothyroïdie. Pour obtenir un état des lieux de l'utilisation de ce médicament en France, l'ANSM a effectué un sondage sur 530 877 personnes.
Dans cet échantillon, 21 771 personnes ont déclaré qu'elles utilisaient ce médicament.

1. Quelle est la fréquence des utilisateurs du médicament dans l'échantillon étudié ?

2. Déterminer un intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95 % de la proportion d'utilisateurs de ce médicament dans la population française.

Rappel : Lorsqu'une fréquence f est mesurée dans un échantillon de taille n, l'intervalle de confiance à 95 % de la proportion dans la population est donné par :

$$I = \left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ,\ f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

Partie C

En médecine, on utilise de l'iode radioactif pour traiter certaines maladies de la glande thyroïde.
La durée de vie exprimée en heure d'un atome d'iode radioactif est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0036$, exprimé en h^{-1}.

1. Calculer la durée de vie moyenne en heure de l'atome d'iode radioactif.

On arrondira le résultat à l'unité.

2. Déterminer $P(24 < D < 48)$. Interpréter le résultat.

Rappel : la fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre λ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

3. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps T, exprimé en heure, nécessaire pour que la moitié des atomes radioactifs d'une substance se soit désintégrée.

Autrement dit, ce réel T est tel que $P(D < T) = \frac{1}{2}$.

a. Démontrer que $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

b. En déduire la demi-vie de l'iode radioactif. Donner le résultat en jour.