Tutos

Exercice 1

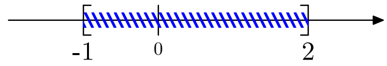
1. Pour chacune des inéquations ci-dessous, représenter sur une droite graduée l'ensemble des nombres x solutions de l'inéquation :

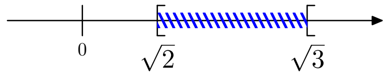
   a. $-1 \leqslant x \leqslant 2$ b. $\sqrt{2} \leqslant x < \sqrt{3}$

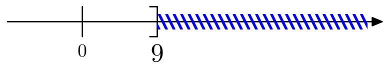
   c. $x > 9$ d. $-5 > x$

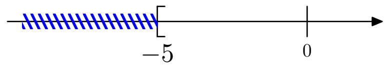
2. Reprendre les inéquations ci-dessus en écrivant leur ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle.

Correction 1

1. a. 

   b. 

   c. 

   d. 

2. Voici les intervalles correspondants aux intervalles :

   a. $x \in [-1\,;2]$ b. $x \in \left[\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right[$

   c. $x \in]9\,;+\infty[$ d. $x \in]-\infty\,;-5[$

Exercice 2

1. Parmi les inéquations suivantes, lesquelles acceptent le nombre 9 comme solution :

   a. $-3x+2 \geqslant 0$ b. $5(x+9) > 0$

   c. $\dfrac{x+1}{4} \geqslant -3\times\dfrac{x-2}{3}$ d. $2 > x$

2. Résoudre les inéquations suivantes

   a. $-3x+7 \leqslant x+2$ b. $-6x+1 > 0$

   c. $-\dfrac{x}{4} < 5$ d. $-3(x+5) < x+5$

   e. $-3x+7 \leqslant 9-x$ f. $\dfrac{x-1}{6}+\dfrac{x+1}{3} < 2$

   g. $x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{x+1}{3}+\dfrac{2x-3}{6}$

Correction 2

1. a. 9 n'est pas solution de l'inéquation $-3x+2 \geqslant 0$ car : $-3\times9+2 = -27+2 = -25$

   b. 9 est solution de l'inéquation $5{\cdot}(x+9) > 0$ car : $5{\cdot}(9+9) = 5\times18 = 90$

   c. 9 est solution de l'équation car :
   - $\dfrac{9+1}{4} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$
   - $-3\times\dfrac{9-2}{3} = -7$

   d. 9 n'est pas solution de l'inéquation de $2 > x$.

2. a.
$$\begin{aligned} -3x+7 &\leqslant x+2 \\ -4x &\leqslant -5 \\ x &\geqslant \frac{-5}{-4} \\ x &\geqslant \frac{5}{4} \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\dfrac{5}{4}\,;+\infty\right[$.

   b.
$$\begin{aligned} -6x+1 &> 0 \\ -6x &> -1 \\ x &< \frac{-1}{-6} \\ x &< \frac{1}{6} \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{6}\right[$.

   c.
$$\begin{aligned} -\frac{x}{4} &< 5 \\ (-4)\times\left(-\frac{x}{4}\right) &> (-4)\times5 \\ x &> -20 \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-20\,;+\infty[$.

   d.
$$\begin{aligned} -3(x+5) &< x+5 \\ -3x-15 &< x+5 \\ -4x &< 20 \\ x &> \frac{20}{-4} \\ x &> -5 \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-5\,;+\infty[$.

   e.
$$\begin{aligned} -3x+7 &\leqslant 9-x \\ -2x+7 &\leqslant 9 \\ -2x &\leqslant 2 \\ x &\geqslant \frac{2}{-2} \\ x &\geqslant -1 \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

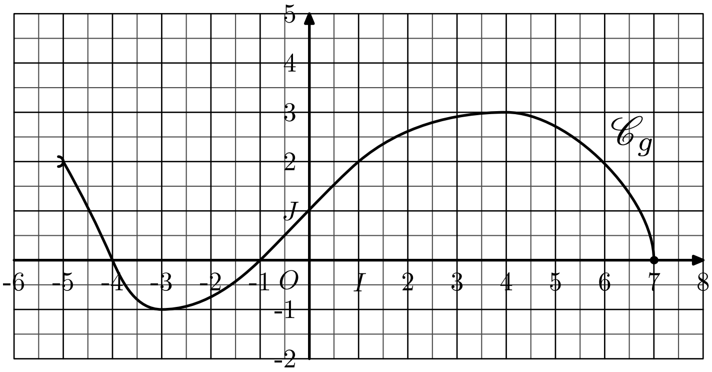
   f.
$$\begin{aligned} \frac{x-1}{6}+\frac{x+1}{3} &< 2 \\ 6\times\left(\frac{x-1}{6}+\frac{x+1}{3}\right) &< 6\times2 \\ (x-1)+2\times(x+1) &< 12 \\ x-1+2x+2 &< 12 \\ 3x+1 &< 12 \\ 3x &< 11 \\ x &< \frac{11}{3} \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{11}{3}\right[$.

g. $$x+\frac{x}{2}-\frac{x}{6}\leqslant\frac{x+1}{3}+\frac{2x-3}{6}$$
$$6\times\left(x+\frac{x}{2}-\frac{x}{6}\right)\leqslant 6\times\left(\frac{x+1}{3}+\frac{2x-3}{6}\right)$$
$$6x+3x-x\leqslant 2\times(x+1)+(2x-3)$$
$$8x\leqslant 2x+2+2x-3$$
$$8x\leqslant 4x-1$$
$$4x\leqslant -1$$
$$x\leqslant\frac{-1}{4}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{1}{4}\right]$.

Exercice 3

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g :



1. Donner, sans justification, l'ensemble de définition de la fonction g.
2. Donner, sans justification, les solutions des deux équations suivantes :
   a. $g(x)=2$ b. $g(x)=0$
3. Résoudre graphiquement les inéquations :
   a. $g(x)\geqslant 2$ b. $g(x)<0$

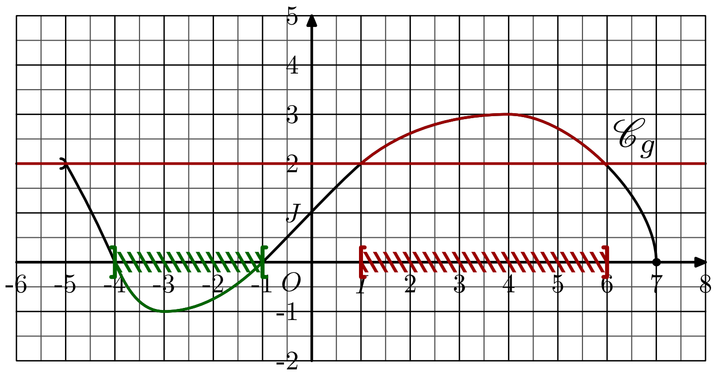
   On surlignera les parties utilisées de la courbe $\mathscr{C}_g$ pour répondre à ces questions.

Correction 3

1. L'ensemble de définition de la fonction g est :
   $\mathcal{D}_g=\left]-5\,;7\right]$
2. a. La droite, parallélè à l'axe des abscisses, d'équation $y=2$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_g$ en deux points de coordonnées :
   $(1\,;2)$; $(6\,;2)$.
   Ainsi les antécédents du nombre 2 par la fonction g sont 1 et 6.
   L'ensemble des solutions est $\{1\,;\,6\}$.

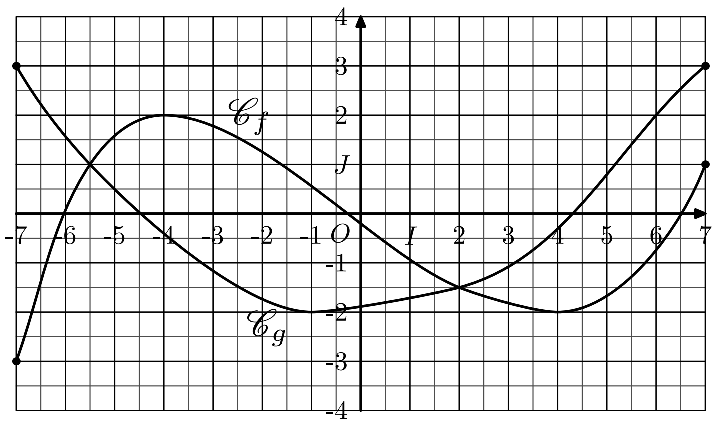
   b. Les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ obtenus avec l'intersection de l'axe des abscisses forment l'ensemble :
   $\{-4\,;-1\,;7\}$
   Cet ensemble contient toutes les solutions de l'équation $g(x)=0$.
3. a. L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x)\geqslant 1$ est formé des abscisses des points appartenant à la courbe $\mathscr{C}_g$ se situant au dessus ou sur la droite d'équation $y=2$:
   $\mathcal{S}=[1\,;6]$

   b. L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x)<0$ est formé des abscisses des points appartenant à la courbe $\mathscr{C}_g$ se situant strictement au dessous de l'axe des abscisses :
   $\mathcal{S}=\left]-4\,;-1\right[$



Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g définies sur $[-7\,;7]$:



1. Déterminer,graphiquement, les coordonnées des points

d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. Graphiquement, résoudre l'inéquation : $g(x) \geqslant f(x)$

Correction 4

1. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ s'interceptent en deux points dont les coordonnées sont :
$(-5{,}5\,;1) \quad ; \quad (2\,;-1{,}5)$

2. Les solutions de l'inéquation $g(x) \geqslant f(x)$ sont les abscisses des points où la courbe $\mathscr{C}_g$ se situe au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

   On en déduit l'ensemble des solutions de cette inéquation :
   $\mathcal{S} = \big[-7\,;-5{,}5\big] \cup \big[2\,;7\big]$

Exercice 5

Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

1.

x	$-\infty$ $+\infty$
$2x+1$	
$3+x$	
$(2x{+}1)(3{+}x)$	

2.

x	$-\infty$ $+\infty$
$2-x$	
$4x-3$	
$(2{-}x)(4x{-}3)$	

3.

x	$-\infty$ $+\infty$
$2+x$	
$2-x$	
$\dfrac{2+x}{2-x}$	

4.

x	$-\infty$ $+\infty$
$4x+1$	
$x-1$	
x	
$\dfrac{(4x{+}1)(x{-}1)}{x}$	

Correction 5

1.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x{+}1)(3{+}x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2{-}x)(4x{-}3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2+x}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

4.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		1		$+\infty$
$4x+1$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(4x{+}1)(x{-}1)}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Exercice 6

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $(x+4)(1-2x) \geqslant 0$ b. $\dfrac{x^2-1}{x+2} < 0$

Correction 6

1. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x{+}4$		$-$	0	$+$		$+$	
$1{-}2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x{+}4)(1{-}2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On en déduit que l'inéquation $(x{+}4)(1{-}2x) \geqslant 0$ admet pour ensemble de solutions :
   $\mathcal{S} = \left[-4\,;\dfrac{1}{2}\right]$

2. On a la factorisation suivante :
$$\frac{x^2-1}{x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+2}$$
   On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x{+}1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x{-}1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x{+}2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x^2{-}1}{x{+}2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

   Ainsi, l'équation $\dfrac{x^2{-}1}{x{+}2} < 0$ admet pour solution d'après le tableau de signe l'ensemble suivant :
   $\mathcal{S} = \big]-\infty\,;-2\big[\cup \big]-1\,;1\big[$

Exercice 7

1. Résoudre l'inéquation :
$(2x-1)(3-x) \geqslant (2x-1)(5x+1)$

2. a. Etablir l'égalité :
$$\frac{3x-6}{2x+3} - \frac{4-7x}{2x-2} = \frac{5x(4x-1)}{(2x-2)(2x+3)}$$

   b. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation :
$$\frac{3x-6}{2x+3} < \frac{4-7x}{2x-2}$$

Correction 7

1. Considérons l'inéquation :
$$\begin{aligned}(2x-1)(3-x) &\geqslant (2x-1)(5x+1)\\ (2x-1)(3-x)-(2x-1)(5x+1) &\geqslant 0\\ (2x-1)\big[(3-x)-(5x+1)\big] &\geqslant 0\\ (2x-1)(3-x-5x-1) &\geqslant 0\\ (2x-1)(-6x+2) &\geqslant 0\end{aligned}$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$2x-1=0$	$-6x+2=0$
$2x=1$	$-6x=-2$
$x=\dfrac{1}{2}$	$x=\dfrac{-2}{-6}$
	$x=\dfrac{1}{3}$

On en déduit le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-6x+2$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-1)(-6x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \left[\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}\right]$

2. a. Etablissons l'égalité :
$$\begin{aligned}\frac{3x-6}{2x+3}-\frac{4-7x}{2x-2} &= \frac{(3x-6)(2x-2)}{(2x+3)(2x-2)}-\frac{(4-7x)(2x+3)}{(2x-2)(2x+3)}\\ &= \frac{6x^2-6x-12x+12}{(2x+3)(2x-2)}-\frac{8x+12-14x^2-21x}{(2x-2)(2x+3)}\\ &= \frac{6x^2-6x-12x+12}{(2x+3)(2x-2)}-\frac{8x+12-14x^2-21x}{(2x-2)(2x+3)}\\ &= \frac{(6x^2-6x-12x+12)-(8x+12-14x^2-21x)}{(2x-2)(2x+3)}\\ &= \frac{6x^2-6x-12x+12-8x-12+14x^2+21x}{(2x-2)(2x+3)}\\ &= \frac{20x^2-5x}{(2x-2)(2x+3)} = \frac{5x\cdot(4x-1)}{(2x-2)(2x+3)}\end{aligned}$$

   b. Considérons l'inégalité :
$$\begin{aligned}\frac{3x-6}{2x+3} &< \frac{4-7x}{2x-2}\\ \frac{3x-6}{2x+3}-\frac{4-7x}{2x-2} &< 0\\ \frac{5x\cdot(4x-1)}{(2x-2)(2x+3)} &< 0\end{aligned}$$

On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$5x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$4x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{5x\cdot(4x-1)}{(2x-2)(2x+3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

On en déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation :
$\mathcal{S} = \left]-\frac{3}{2}\,;0\right[\cup\left]\frac{1}{4}\,;1\right[$

Exercice 8

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $(x+1)(1-x) > (2x-1)(x+1)$

b. $x^3-x \leqslant 0$

c. $(x+1)^2-(x+1)(2-x) \geqslant 0$

d. $\dfrac{x+1}{x-1} < -1$

Correction 8

a. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\begin{aligned}(x+1)(1-x) &> (2x-1)(x+1)\\ (x+1)(1-x)-(2x-1)(x+1) &> 0\\ (x+1)\big[(1-x)-(2x-1)\big] &> 0\\ (x+1)(1-x-2x+1) &> 0\\ (x+1)(2-3x) &> 0\end{aligned}$$

Etudions le signe de l'expression du membre de gauche :

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)(2-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'inéquation a pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \left]-1\,;\frac{2}{3}\right[$

b. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\begin{aligned}x^3-x &\leqslant 0\\ x\cdot(x^2-1) &\leqslant 0\\ x\cdot(x+1)(x-1) &\leqslant 0\end{aligned}$$

Etudions le signe de l'expression du membre de gauche :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(x+1)(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Cette équation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \big]-\infty\,;-1\big] \cup \big[0\,;1\big]$

c. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x+1)(2-x) &\geqslant 0\\ (x+1)\big[(x+1)-(2-x)\big] &\geqslant 0\\ (x+1)(x+1-2+x) &\geqslant 0\\ (x+1)(2x-1) &\geqslant 0\end{aligned}$$

Etudions le signe de l'expression du membre de gauche :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \big]-\infty\,;-1\big[\cup \Big]\frac{1}{2}\,;+\infty\Big[$

d. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x-1} &< -1\\ \frac{x+1}{x-1}+1 &< 0\\ \frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x-1} &< 0\\ \frac{(x+1)+(x-1)}{x-1} &< 0\\ \frac{2x}{x-1} &< 0\end{aligned}$$

Etudions le signe de l'expression du membre de gauche :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \big]0\,;1\big[$

