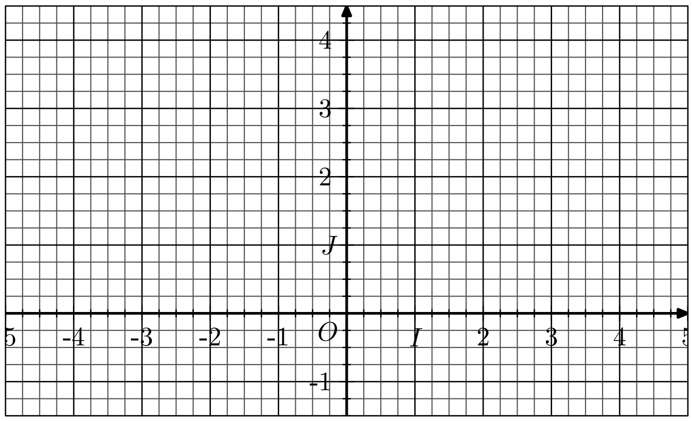
Première Spécialité/Equation cartésienne

1. Vecteurs normaux et équations de droites :

Exercice 2591

On considère le plan munit d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.

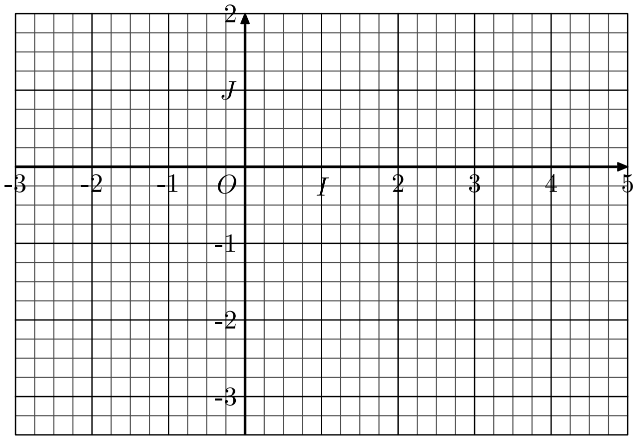
1. Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne passant par le point A et admettant le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur normal :
   a. $\overrightarrow{u}=(2\,;3)$ et $A(1\,;0)$
   b. $\overrightarrow{u}=(-1\,;1)$ et $A(-2\,;1)$
2. Tracer la représentation de chacune de ces droites dans le repère ci-dessous ainsi qu'un représentant de chaque vecteur $\overrightarrow{u}$ au point A correspondant :



Exercice 8446

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on considère les points $A(-2\,;-3)$ et $B(4\,;1)$. On note (d) la médiatrice du segment $[AB]$.

1. Déterminer les coordonnées du point K milieu du segment $[AB]$.
2. Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ normal à la droite (d).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).
4. Tracer dans le repère ci-dessous la droite (d).



2. Parallélisme et orthogonalité de droites :

Exercice 8449

On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé :

1. On considère les deux droites (d_1) et (d_2) admettant pour équation cartésienne :
   $(d_1):\ x+2{\cdot}y-1=0 \quad ; \quad (d_2):\ 4{\cdot}x+8{\cdot}y+2=0$

   Justifier que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
2. On considère les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) admettant pour équation cartésienne :
   $(\Delta_1):\ 4{\cdot}x+3{\cdot}y-1=0 \quad ; \quad (\Delta_2):\ -6{\cdot}x+8{\cdot}y+5=0$

   Justifier que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.

3. Intersection de droites :

Exercice 6484

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;\,I\,;\,J\big)$, on considère la droite (d) *(resp.* (d')*)* passe par le point $A(-2\,;1)$ *(resp.* $B(3\,;2)$*)* et admet le vecteur $\overrightarrow{u}(3\,;-1)$ *(resp.* $\overrightarrow{v}(1\,;1)$*)* pour vecteur normal.

1. Déterminer les équations cartésiennes des droites (d) et (d').
2. a. Justifier que les droites (d) et (d') sont sécantes.
   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d').

Exercice 3036

Dans le plan $\big(O\,;\,I\,;\,J\big)$, on considère les points A, B, C, D de coordonnées :

$A(-1\,;-1)\quad ;\quad B(2\,;-4)\quad ;\quad C\left(\frac{22}{5}\,;\frac{4}{5}\right)\quad ;\quad D\left(\frac{1}{5}\,;\frac{7}{5}\right)$

1. Soit K le milieu du segment $[AB]$. On considère l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M(x\,;y)$ du plan qui vérifie la relation : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KM}=0$

   a. Montrer que tout point $M(x\,;y)$ appartenant à l'ensemble $(\mathcal{E})$ a ses coordonnées qui vérifient l'équation : $x-y-3=0$

   b. Comment s'appelle l'ensemble $(\mathcal{E})$ relativement au segment $[AB]$.

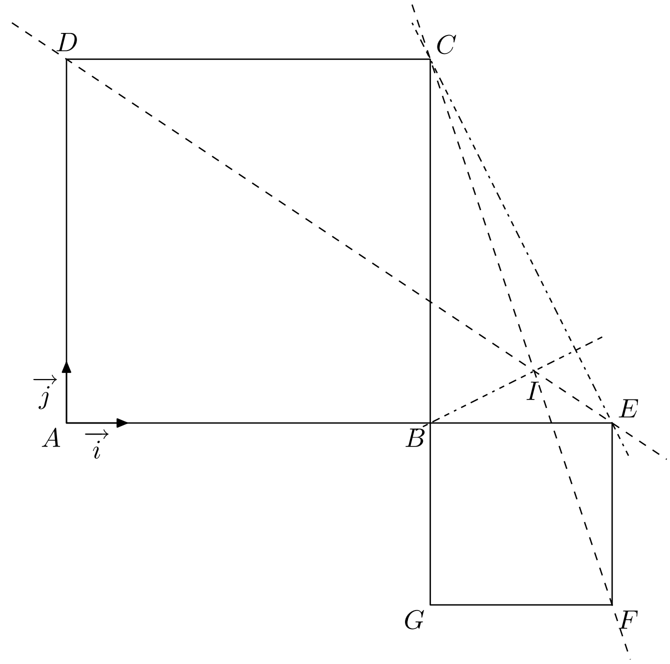
2. a. Déterminer les coordonnées d'un vecteur orthogonal à la droite (CD).

   b. En déduire l'équation de la droite (CD).

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d').

Exercice réservé 3082

Dans le plan, on considère les deux carrés $ABCD$ et $BEFG$ représentés ci-dessous :



On munit le plan du repère orthonormée $\left(A\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ où :
$\|\overrightarrow{AB}\|=6\quad ;\quad \|\overrightarrow{BE}\|=3$

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CF}$.

   b. En déduire les équations cartésiennes des droites (DE) et (CF) dans le plan $\left(A\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

2. Déterminer les coordonnées du point I.

3. Justifier que les droites (BI) et (CE) sont perpendiculaires.

4. Projeté orthogonal :

Exercice 8447

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les points $A(-1\,;1)$, $B(3{,}5\,;-2)$, $M(4\,;2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

2. Montrer que le point $H(2\,;-1)$ est le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB).

Exercice 8448

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les points $A\left(1\,;-\frac{1}{5}\right)$, $B(-2\,;1)$, $M\left(2\,;-\frac{7}{2}\right)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

2. a. Déterminer l'équation réduite de la droite (d) passant par le point M et perpendiculaire à la droite (AB).

   b. Déterminer les coordonnées du point E intersection des droites (d) et (AB).

Exercice 8450

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les trois points : $A(-3\,;2)\quad ;\quad B(3\,;5)\quad ;\quad C(2\,;2)$

1. Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.

2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 8451

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les trois points : $A\left(-\frac{2}{3}\,;2\right)\quad ;\quad B\left(\frac{1}{4}\,;\frac{3}{2}\right)\quad ;\quad C\left(5\,;\frac{11}{3}\right)$

1. Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.

2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 8456

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ et des quatres points :
$A(3\,;2)\quad ;\quad B(-1\,;3)\quad ;\quad C(2\,;-2)\quad ;\quad D(6\,;-3)$

1. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Déterminer l'aire du parallélogramme $ABCD$.

5. Cercle : caractérisation par le centre et le rayon :

Exercice 2592

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$ dont l'unité est le centimètre.

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon r. Pour chaque question, déterminer l'équation du cercle :

a. $I(1;2)$ et $r=3\,cm$ b. $I(-3;1)$ et $r=5\,cm$

Exercice 8457

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $K(3;-1)$ et de rayon 5.

1. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.
2. Parmi les points ci-dessous, lesquels appartiennent au cercle $\mathscr{C}$:
$M(-1;2)$; $N\Big(\dfrac{8}{5};-\dfrac{29}{5}\Big)$; $P\Big(\dfrac{9}{5};\dfrac{2}{5}\Big)$

Exercice réservé 3035

Dans le plan $(O;I;J)$, on considère les points A, B, C, D de coordonnées :

$A(-1;-1)$; $B(2;-4)$; $C\Big(\dfrac{22}{5};\dfrac{4}{5}\Big)$; $D\Big(\dfrac{1}{5};\dfrac{7}{5}\Big)$

1. Déterminer s'il existe des réels a, b et c tels que l'équation :
$x^2+y^2-2{\cdot}a{\cdot}x-2{\cdot}b{\cdot}y+c=0$
soit vérifiée par les coordonnées des quatres points A, B, C et D.
2. Que peut-on dire des points A, B, C et D?

Exercice 8458

On considère le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé et des trois points suivants :
$A(-1;2)$; $B(0;-5)$; $C(3;4)$

1. a. Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.
   b. Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AC]$.
2. a. En déduire le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.
   b. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

6. Cercle : caractérisation par le diamètre :

Exercice 8455

Proposition : Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle et qu'un de ses côtés forme un diamètre alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.

Conséquence : Pour un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ et pour tout point M de ce cercle : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$ dont l'unité est le centimètre.

On considère le cercle $\mathscr{C}'$ dont les points A et B sont diamétralement opposés. Déterminer l'équation du cercle dans chacun des cas suivants :

a. $A(-2;0)$ et $B(4;0)$ b. $A(2;-3)$ et $B(-1;2)$

Exercice 8454

On considère le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé. On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $K(2;1)$ et de rayon 3.

1. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.
2. a. Montrer que le point $A(2;4)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.
   b. Déterminer les coordonnées du point B diamétralement opposé au point A dans le cercle $\mathscr{C}$.
3. a. Soit $M(x;y)$ un point du plan vérifiant la relation : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$
   Déterminer l'équation cartésienne des points M vérifiant cette relation.
   b. Que peut-on en conclure sur la nature du triangle ABM vérifiant : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

Exercice 8459

On considère le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé.

1. a. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ admettant pour diamètre le segment $[AB]$ où :
   $A(-1;2)$; $B(7;-4)$
   b. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}'$ admettant pour diamètre le segment $[CD]$ où :
   $C\Big(-\dfrac{9}{5};\dfrac{2}{5}\Big)$; $D\Big(\dfrac{39}{5};-\dfrac{12}{5}\Big)$
2. Que peut-on dire des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$?

7. Reconnaissance de l'équation d'un cercle :

Exercice 8452

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère l'équation cartésienne :

(E) : $x^2+y^2-4{\cdot}x-3{\cdot}y-31=0$

1. Montrer que les points $A(-3;5)$ et $B\left(\frac{11}{2};\frac{13}{2}\right)$ appartiennent à l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions de (E).

2. En déduire la nature de l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation cartésienne (E)

Exercice 3083

On considère les trois équations cartésiennes suivantes :

a. $x^2+y^2+6x-4y+9=0$

b. $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

c. $x^2+y^2+4x-4y+9=0$

1. Ecrire chacune des équations ci-dessus sous la forme :
$(x-a)^2+(y-b)^2=c$
où a, b, c sont des nombres réels à déterminer.

2. Pour chaque équation, en déduire la nature de l'ensemble des points défini par cette équation et en préciser les élèments caractéristiques

Exercice 8453

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé, on considère les deux points $A(0;-1)$ et $B(2;1)$.
Pour tout nombre réel k, on considère l'équation cartésienne (E_k) définie par :

(E_k) : $x^2+y^2-2k{\cdot}x+(2k-2){\cdot}y+2{\cdot}k-3$

1. a. Pour tout nombre réel k, montrer que les coordonnées des points A et B vérifient l'équation cartésienne (E_k).

   b. Pour tout nombre réel k, donner et justifier de la nature de l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation (E_k).

2. a. Déterminer, en fonction de k, les coordonnées du centre et le rayon du cercle définie par l'équation (E_k).

   b. Démontrer que l'ensemble des centres des cercles défini par (E_k) appartienne à une droite dont on donnera l'équation cartésienne.

9. Etude de la parabole :

Exercice 6485

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé, on considère l'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation cartésienne :

(E) : $x^2-2{\cdot}x+y+3=0$

1. On considère les deux points $A(0;-3)$ et $B(2;-3)$.

   a. Montrer que les deux points A et B appartiennent à l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation cartésienne (E).

   b. Montrer que la droite d'équation $x=1$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

2. Soit h un nombre strictement positif.

   a. Montrer qu'il existe un unique point, qu'on notera M *(resp. N)*, de l'ensemble (E) ayant pour abscisse $1+h$ *(resp. $1-h$)*. On donnera les coordonnées de ces deux points en fonction de h.

   b. Montrer que la droite d'équation $x=1$ est la médiatrice du segment $[MN]$ pour tout réel h strictement positif.

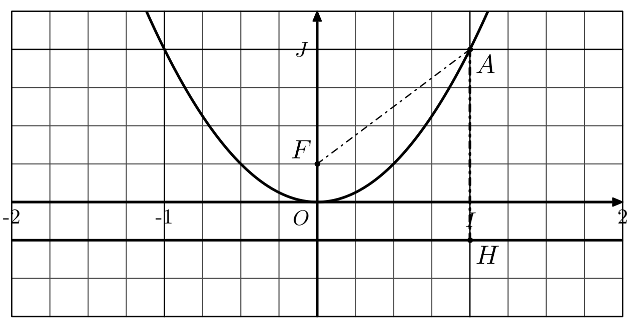
10. Approfondissement : foyer et directrice d'une parabole :

Exercice 8460

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points dont les coordonnées vérifient :

$x^2-y=0$

dont la représentation est donnée ci-dessous :



On note F le point de coordonnées $F\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

1. On considère le point $A(1;1)$ et H son projeté orthogonal sur la droite (d) dont l'équation cartésienne est :
$y-\frac{1}{4}=0$

   a. Justifier que le point A appartient à l'ensemble $(\mathcal{E})$.

   b. Déterminer la distance AF.

   c. Donner les coordonnées du point H.

   d. Déterminer la distance AH.

2. Soit x un nombre réel quelconque. On note M le point de l'ensemble $(\mathcal{E})$ ayant pour abscisse x.

   a. Donner les coordonnées du point M et de son projeté H' sur la droite (d).

   b. Déterminer la mesure de la distance FM et MH'.

11. Approfondissement : intersection cercle, parabole avec une droite :

Exercice 2597

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.

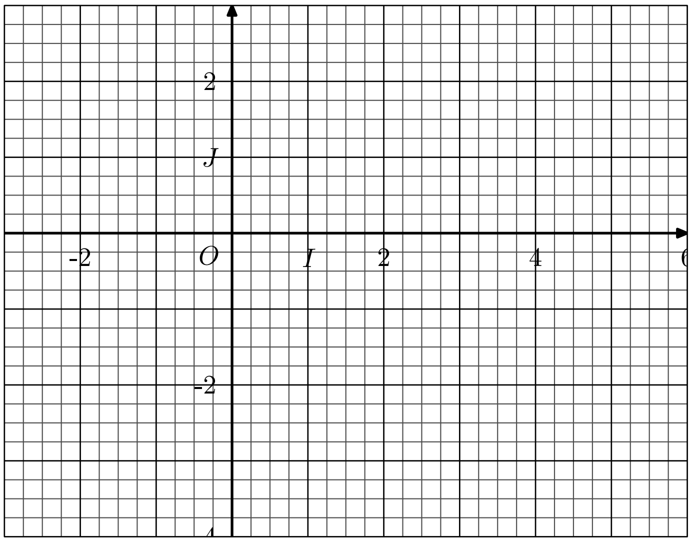
1. a. Soit (d) la droite ayant pour vecteur directeur $(1\,;2)$ et passant par le point $A(0\,;-1)$.
   Déterminer l'équation cartésienne de cette droite.

   b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(1\,;1)$ et de rayon 3.
   Déterminer l'équation cartésienne de ce cercle.

2. Dans cette question, on s'intéresse au point d'intersection de (d) et de $\mathscr{C}$.

   a. Justifier que si $M(x\,;y)$ est un point d'intersection de la droite et du cercle alors ses coordonnées vérifient le système d'équation :
   $$\begin{cases} x^2+y^2-2{\cdot}x-2{\cdot}y-7=0 \\ -2{\cdot}x+y+1=0 \end{cases}$$

   b. Par substitution, résoudre ce système d'équation.



Exercice 2660

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et l'ensemble des points $\mathcal{E}$ défini par l'équation cartésienne :

$$(E) :\ x^2+y^2-4{\cdot}x+6{\cdot}y+3=0$$

1. a. Ecrire l'équation (E) sous la forme :
   $$(x-a)^2+(y-b)^2=c$$

   b. Justifier que l'ensemble $\mathcal{E}$ est un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera les caractéristiques.

2. a. Montrer que le point $A(3\,;0)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.

   b. Déterminer une équation cartésienne de la tangente (d) au cercle $\mathscr{C}$ passant par le point A.

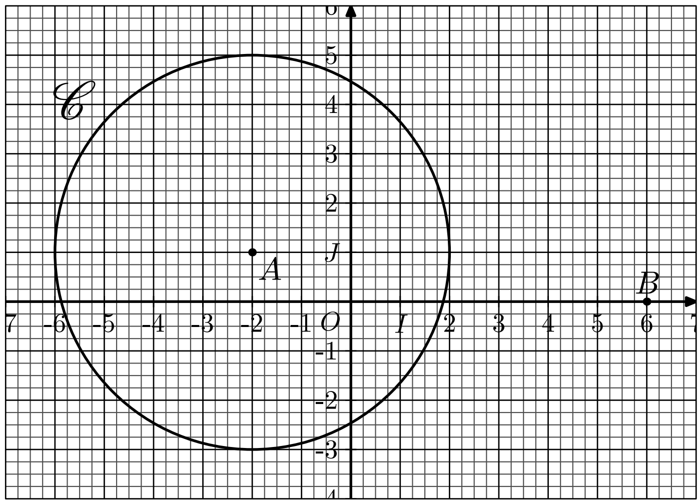
3. Après avoir montré que le point $B(-1\,;-2)$ est un point du cercle, donner une équation cartésienne de la droite (d') tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point B.

4. Déterminer les coordonnées du point M intersection des droites (d) et (d').

5. Tracer dans le repère ci-dessous le cercle $\mathscr{C}$ *(ou une partie)* et ses deux tangentes.

Exercice réservé 3039

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(-2\,;1)$ et de rayon 4 ; le point B a pour coordonnée $(6\,;0)$:



Le but de cet exercice est de déterminer l'équation des deux tangentes, (d) et (d'), au cercle $\mathscr{C}$ passant par le point B :

1. a. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$.

   b. Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$.

2. Déterminer les coordonnées des points de contact des droites (d) et (d') avec le cercle $\mathscr{C}$.

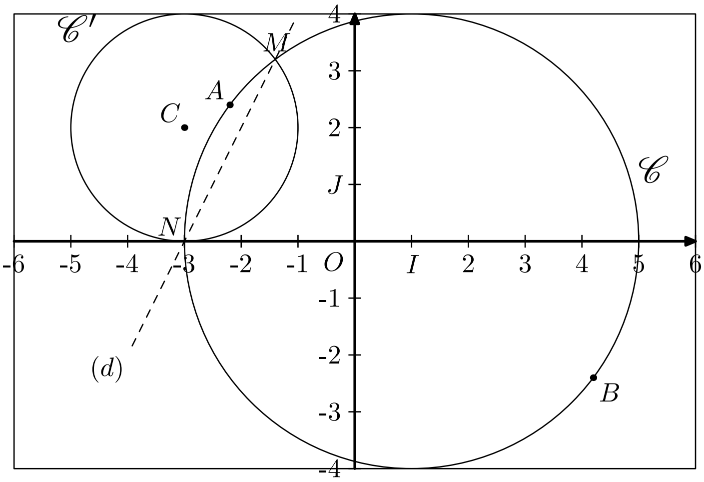
3. En déduire que les droites (d) et (d') admettent les équations cartésiennes :
   $$35{\cdot}x-84{\cdot}y-210=0 \quad ; \quad -21{\cdot}x-28{\cdot}y+126=0$$

4. Déterminer les coordonnées, pour chacune des droites, de leurs points d'abscisse 3 ; effectuer le tracé de ces droites.

Exercice réservé 3088

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les points $A\left(-\frac{11}{5}\,;\frac{12}{5}\right)$, $B\left(\frac{21}{5}\,;-\frac{12}{5}\right)$, $C(-3\,;2)$; les points A et B sont diamétralement opposés dans le cercle $\mathscr{C}$; le cercle

$\mathscr{C}'$ a pour centre C et a pour rayon 2. On note M et N les deux points d'intersection des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.



1. Déterminer les équations des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

2. Déterminer les coordonnées des points M et N.

3. En déduire l'équation cartésienne de la droite (d).

255. Exercices non-classés :

Exercice 3040

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$; les points A et B ont pour coordonnées respectives $(2\,;-3)$ et $(-1\,;1)$; on note I le milieu du segment $[AB]$; M représente un point quelconque du plan et ses coordonnées sont notées $(x\,;y)$:

1. On s'intéresse au lieu géométrique $\mathcal{E}$ défini par la relation : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=2$

   a. Déterminer une relation entre x et y caractérisant l'ensemble $\mathcal{E}$.

   b. Vérifier que le point de coordonnée $\left(2\,;\sqrt{6}-1\right)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

   c. Quel est la nature géométrique de $\mathcal{E}$? Donner ses éléments caractéristiques.

2. On s'intéresse au lieu géométrique $\mathcal{F}$ défini par la relation : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM}=-7{,}5$

   a. Déterminer une relation sur les coordonnées des points M appartenant à l'ensemble $\mathcal{F}$.

   b. Quel est la nature géométrique de $\mathcal{F}$? Donner les éléments caractétristiques de $\mathcal{F}$.