Première Spécialité/Second degré : équations

Davantage d'exercices sur le 2nd degré en suivant le lien :
https://chingatome.fr/chapitre/hp-lycee/fonctions-second-degre

1. Manipulation de polynomes du second degré :

Exercice 432

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

1. a. Etablir l'égalité : $f(x)=2{\cdot}(x-3)(x-1)$
   b. Résoudre l'équation : $f(x)=0$.
   c. Résoudre l'inéquation : $f(x)\leqslant 0$.
2. a. Etablir l'égalité : $f(x)+2=2\big(x-2\big)^2$
   b. En déduire que, pour tout nombre x réel, on a : $f(x) \geqslant -2$

Exercice réservé 439

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par :
$$f(x) = -4x^2 + 36x + 63$$

1. a. Etablir l'égalité : $f(x)=(21-2{\cdot}x)(2{\cdot}x+3)$
   b. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation : $f(x)=0$.
   c. Résoudre l'inéquation : $f(x)>0$
2. a. Etablir l'égalité : $f(x)-144=-4{\cdot}\Big(x-\dfrac{9}{2}\Big)^2$.
   b. En déduire que, pour tout nombre x réel, on a : $f(x) \leqslant 144$

Exercice 418

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -2{\cdot}x^2 + 12{\cdot}x - 16$

1. a. Déterminer les valeurs des réels a et b réalisant l'identité :
   $f(x) = \big(x-2\big)\big(a{\cdot}x+b\big)$
   b. Résoudre l'inéquation : $f(x) < 0$
2. a. Déterminer les valeurs des réels c et d réalisant l'identité $f(x) = -2{\cdot}\big(x+c\big)^2 + d$
   b. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) \leqslant 2$

2. Forme canonique :

Exercice 4458

Tout polynôme du second degré $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ admet une expression de la forme :
$$f : x \mapsto \alpha{\cdot}\big(x-\beta\big)^2 + \gamma$$
où α, β, γ sont des nombres réels avec $\alpha\neq 0$.
Cette expression s'appelle la **forme canonique**.

Associer à chacun des polynômes du second degré sa forme canonique :

$4x^2+8x+7$ ∘	∘ $(x+2)^2-5$
x^2+4x-1 ∘	∘ $(x-4)^2-4$
$x^2-8x+20$ ∘	∘ $4(x+1)^2+3$
$4x^2-16x+6$ ∘	∘ $4(x-2)^2-10$
$-4x^2-16x-12$ ∘	∘ $(x-4)^2+4$
$x^2-8x+12$ ∘	∘ $-4(x-2)^2+4$
$-4x^2+16x-12$ ∘	∘ $-4(x+2)^2+4$

Exercice 2259

Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

a. $2x^2+8x-6$ b. $3x^2+6x+6$
c. $9x^2+18x+27$ d. $5x^2+10x+2$
e. $2x^2+12x-4$ f. $3x^2+30x+12$

Exercice 4456

Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a. x^2+2x-3 b. x^2-6x-2
c. $x^2+12x+5$ d. $x^2-10x+5$
e. x^2+4x f. $x^2-14x+9$

Exercice réservé 2248

Déterminer la forme canonique de chacune des expressions ci-dessous :

a. x^2-4x+1 b. x^2+6x+3 c. x^2+x+2
d. x^2-3x-1 e. $x^2+\dfrac{1}{2}x-3$ f. $x^2+x-\dfrac{1}{3}$

Exercice réservé 4406

Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a. x^2+4x-5 b. x^2-2x-1

c. x^2+x+1 d. $x^2+\frac{1}{4}x+1$

e. $2x^2+12x-4$ f. $7x^2-14x+10$

Exercice réservé 2250

Soit a, b, c trois nombres réels. Développer l'expression suivante :

$$a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Exercice 7101

Déterminer la forme canonique du polynôme ci-dessous :
$\sqrt{2}\cdot x^2-3\cdot x+1$

3. Forme canonique et équations :

Exercice réservé 7220

On considère le polynôme (P) : $x^2+4\cdot x+9$.

1. Déterminer la forme canonique du polynôme P.
2. En déduire que l'équation $x^2+4\cdot x+9=1$ n'admet aucune solution.

Exercice 7227

On considère le polynôme (P) : x^2+6x+3

1. Déterminer la forme canonique du polynôme P.
2. En déduire les solutions de l'équation : $x^2+6x+3=10$

Exercice 4410

On considère l'expression : (E) : $x^2+3x+10$

1. Déterminer l'expression de la forme canonique de (E).
2. Déduire de la forme canonique de (E) que l'équation ci-dessous n'admet pas de solution :
   $x^2+3x+10=0$

Exercice réservé 2246

1. Factoriser chacune des expressions suivantes en produit de facteurs du premier degré :

   a. $4x^2-81$ b. x^2-5

   c. $(2x-4)^2-9$ d. $x^2-6\cdot x+9$

2. Trouver un argument permettant de justifier que l'expression x^2+1 ne peut se factoriser sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
   on aura alors établit l'assertion suivante :

   Il n'existe pas de nombre réels α, β, γ, δ tel que :
   $x^2+1=(\alpha\cdot x+\beta)(\gamma\cdot x+\delta)$

Exercice réservé 2247

1. On considère l'expression P définie par :
   $$P=\left(x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$$
   a. Donner la forme développée et réduite de l'expression P.

   b. Résoudre l'équation : $P=0$.
2. Soit la fonction f dont l'image de x est définie par :
   $f(x)=x^2-2x-2$

   a. Déterminer les valeurs des deux réels α et β vérifiant l'égalité suivante :
   $f(x)=\big(x-\alpha\big)^2+\beta$

   b. Déterminer la forme factorisée de la fonction f.

   c. Déduire de la question précédente, les antécédents de 0 par la fonction f.

4. Calcul du discriminant :

Exercice 4459

Le **discriminant** d'un polynôme $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ du second degré est un nombre qui se calcule à l'aide des coefficients du polynôme :
$\Delta=b^2-4\times a\times c$

Compléter le tableau ci-dessous pour chacun des polynômes du second degré :

	a	b	c	$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c$
$2x^2+5x+1$				
$-x^2+7x+3$				
x^2-5x+4				
$2x^2-4x-1$				
$-x^2-x-1$				
x^2+7				

Exercice 4408

Déterminer le discriminant des polynômes du second degré ci-dessous :

a. x^2+2x+4 b. $2x^2+4x+1$ c. x^2-2x+1
d. $-2x^2+2x+1$ e. x^2-x-1 f. $3x^2+x-2$

5. Equation du second degré :

Exercice 2253

Les racines d'un polynôme sont les valeurs annulant ce polynôme.
Pour un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré, le nombre de racines existantes dépend du discriminant :

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
Aucune solution	1 solution $-\dfrac{b}{2{\cdot}a}$	2 solutions $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$; $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2+4x-5=0$ b. $x^2+x+1=0$
c. $2x^2-13x+15=0$ d. $3x^2-2x+1=0$

Exercice réservé 2260

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2+2x-15=0$ b. $3x^2-5x+7=0$
c. $3x^2-24x+48=0$ d. $-4{\cdot}x^2-x+3=0$

Exercice 770

Résoudre les équations suivantes :

a. $3x^2-5x+6=0$ b. $3x^2-24x+48=0$
c. $x(x-2)(x+1)=(x-2)(-7-3x)$

Exercice 5710

Déterminer les racines, sous forme simplifiée, des polynômes suivants :

a. $2x^2-3x-9$ b. $5x^2-8x+5$ c. $2x^2-8x+8$

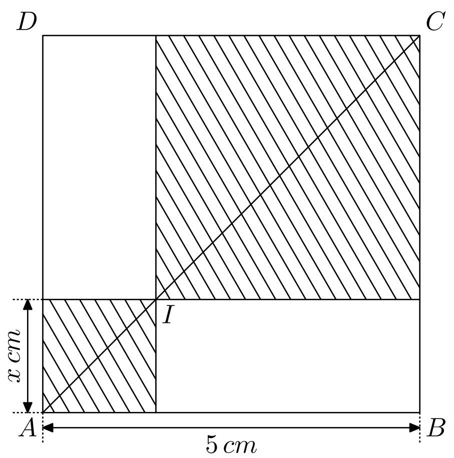
Exercice 7086

Déterminer les racines des polynômes du second degré suivants :

a. $4{\cdot}x^2-8{\cdot}x+3$ b. $9x^2+12x+4$
c. $-2{\cdot}x^2-5{\cdot}x-3$ e. $2{\cdot}x^2+5{\cdot}x+2$
f. x^2+x-2 g. $3{\cdot}x^2+4{\cdot}x+2$

6. Problèmes :

Exercice 2955



On considère un carré $ABCD$ de 5 centimètres de côté ; un point I appartient à la diagonale $[AC]$, il est repéré comme l'indique la figure ci-dessous par la longueur x :

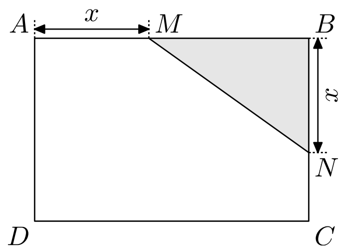
A partir de ce point I, on construit deux carrés de diagonale respectives $[AI]$ et $[IC]$.

Déterminer la valeur de x pour laquelle la somme des aires de ces deux carrés vaut les $3/4$ de l'aire du carré $ABCD$.

Exercice réservé 5972

Dans cet exercice, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère un rectangle $ABCD$ dont les dimensions sont données ci-dessous :
$AB=6\,m$; $AD=4\,m$.
Pour un nombre réel x compris entre 0 et 4, on place les points M et N respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ tels que : $AM=x$; $BN=x$

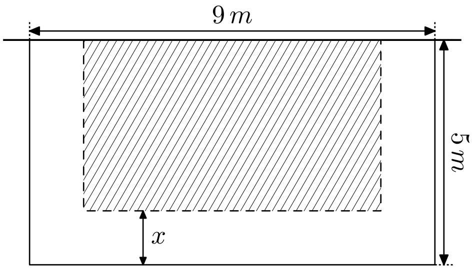


Déterminer la ou les valeurs possibles de x pour que l'aire du triangle MBN soit égales à $\dfrac{1}{6}$ de l'aire totale du rectangle $ABCD$.

Exercice réservé 5713

Adossé à sa maison, Jean possède un jardin de forme rectangulaire ayant pour dimensions $9\,m$ et $5\,m$.

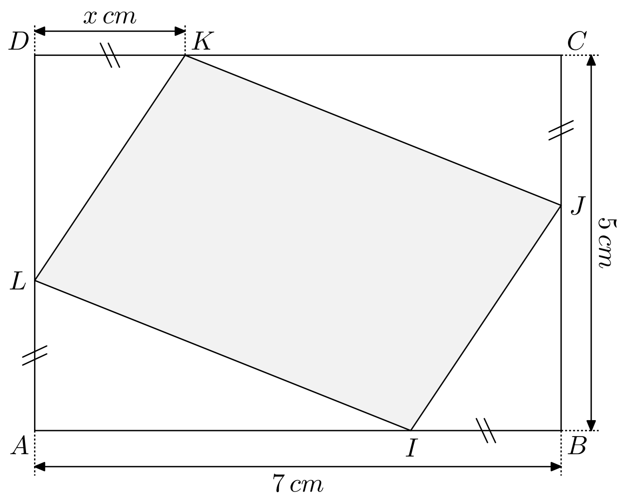
Il souhaite construire sur trois des côtés de ce jardin une allée ayant la même largeur et il plantera de la pelouse sur le reste du jardin. Il propose le schéma ci-dessous où la partie hachurée est l'espace de la pelouse



Quelle doit-être la largeur de l'allée pour que l'ensemble de la pelouse ait une surface de $10\,m^2$?

Exercice 5706

On considère la figure ci-dessous où $ABCD$ est un rectangle tel que : $ABCD$ est un rectangle.
Les points I, J, K, L sont des points appartenant respectivement aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$ vérifiant :
$IB = JC = KD = LA$



Quelle doit-être la valeur de x pour que la figure grisée ait une aire de $25\,cm^2$?

Exercice réservé 7152

Soit m un nombre réel. On considère le polynôme P défini par : $P=(m+1)\cdot x^2+(2-m)\cdot x+1$

Pour quelles valeurs de m, le polynôme P n'admet aucune racine?

7. Problèmes avec substitution :

Exercice 8384

1. Résoudre l'équation : $x^2-\dfrac{37}{2}\cdot x+85=0$

2. On considère un rectangle ayant $37\,m$ pour périmètre et $85\,m^2$ pour aire. On notera respectivement L et ℓ, la longueur et la largeur de ce rectangle.

   a. Exprimer ℓ en fonction de L.

   b. Déterminer les dimensions de ce rectangle.

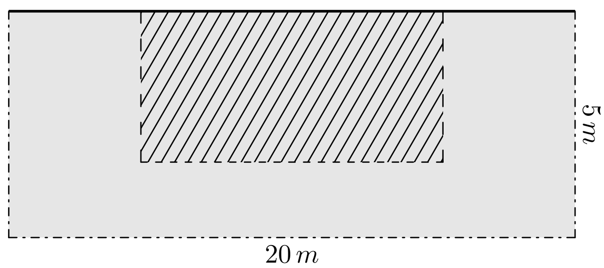
Exercice 8196

Un rectangle a pour périmètre $19\,m$ et pour aire $12\,m^2$.

Déterminer les dimensions de ce rectangle.

Exercice 8309

Iliam veut construire un poulailler, de forme rectangulaire, dans son jardin. La figure ci-dessous indique la dimension du jardin d'Iliam et la place du poulailler qui sera adossé au mur de sa maison :



Le poulailler est représenté par la surface hachurée.

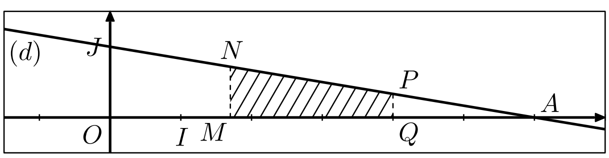
Il dispose de $17\,m$ de grillage pour construire sa clôture et souhaite utiliser tout le grillage pour construire son poulailler d'une aire de $30\,m^2$

Déterminer la dimension du poulailler réalisant ses conditions.

8. Problèmes et courbes représentatives de fonctions :

Exercice 8308

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la droite (d) passant par les points J et $A(6\,;0)$



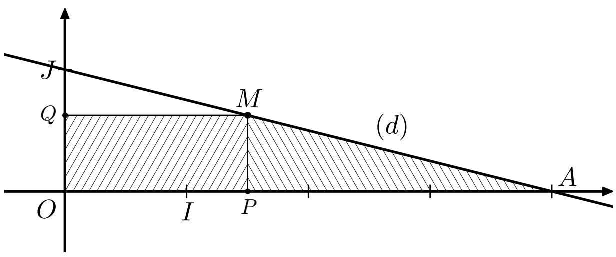
- Le point Q a pour abscisse 4 et l'abscisse du point M appartient à l'intervalle $[0\,;4]$;
- Le point N *(resp. P)* appartient à la droite (d) et a même abscisse que le point M *(resp. Q)*.

1. Déterminer les coordonnées du point N en fonction de x.

2. Déterminer l'abscisse du point N afin que l'aire du trapèze $MNPQ$ vale $\dfrac{7}{4}$.

Exercice 6691

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère la droite (d) passant par les points $A(4;0)$ et J.



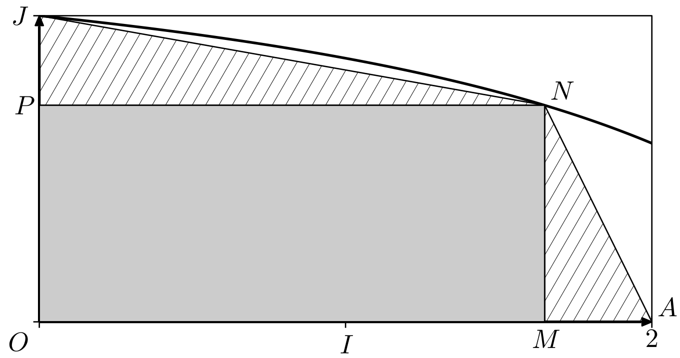
On considère un point M appartenant à la droite (d) et d'abscisse x tel que $x\in]0;4[$.

Déterminer la position du point M sur la droite (d) telle que le rectangle $OPMQ$ et le triangle MPA aient la même aire.

Toute trace de recherche et de prise d'initiatives seront prises en compte au cours de l'évaluation.

Exercice réservé 7153

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par la relation :
$$f(x)=\frac{17\cdot x-48}{12\cdot x-48}$$
On représente la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O;I;J)$ orthonormé ci-dessous :



Soit x un nombre appartenant à l'intervalle $]0;2[$. On désigne par N le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$. Le point A a pour coordonnées $(2;0)$ et le rectangle $OMNP$ est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes.

Déterminer la ou les valeurs de x afin que les triangles JNP et AMN soient de même aire.

9. Equations avec simplification de radicaux :

Exercice 8310

Déterminer les racines du polynôme x^2+8x+8.

En remarquant $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, on exprimera ces racines sous la forme : $a+b\cdot\sqrt{2}$ où $a,b\in\mathbb{R}$

Exercice 8288

Déterminer les racines des polynômes ci-dessous :

a. $2x^2+3x+3$ b. x^2-2x-6 c. x^2+2x-1

Indication : on exprimera ces racines, si elles existent, sous la forme : $a+b\cdot\sqrt{c}$ où $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}_+^*$

Exercice 8289

Déterminer les racines des polynômes du second degré suivants :

a. $-2\cdot x^2+2\cdot x+1$ c. $-x^2-4x-2$

d. $-2\cdot x^2-x+1$ e. $2\cdot x^2-x+3$

f. $5\cdot x^2+3\cdot x-2$ g. $2\cdot x^2-4x+1$

Indication : on exprimera les racines sous la forme la plus simplifiée possible.

Exercice 1969

1. Soit (P) le polynôme défini par : $x^2-2\cdot x-1$

   Evaluer le polynôme (P) pour $x=1+\sqrt{2}$.

2. Etablir que le nombre $\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}$ est une racine du polynôme x^2+5x+2.

3. Démontrer que l'équation $-3x^2+6x-2=0$ admet pour ensemble de solution : $S=\left\{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3};1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

10. Somme et produit des racines :

Exercice 2297

1. **Etude théorique :**

   On admet que pour un trinôme ax^2+bx+c du second degré dont le discriminant Δ est strictement positif, ces deux racines s'expriment sous la forme :
   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
   a. Montrer que la somme des racines vaut $-\dfrac{b}{a}$.

   b. Montrer que le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a}$

2. **Application :**

   En utilisant les propriétés établies à la question précédentes, répondre aux questions suivantes :

   a. On considère le polynôme $2x^2+4x-16$. Après avoir vérifié que 2 est une racine de ce polynôme, déterminer la valeur de l'autre racine.

   b. Déterminer un trinôme du second degré admettant deux racines dont la somme des racines vaut 3 et le produit des racines vaut -10.

11. D'autres équations :

Exercice 2255

On considère la fonction polynome P de degré 3 définie par :
$$P(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$$

1. Déterminer les valeurs de a, b, c tel que :
$$P(x) = (x+2)\big(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c\big)$$

2. En déduire l'ensemble des zéros du polynôme P.

Exercice 8106

On considère la fontion f définie par :
$$f(x) = 4{\cdot}x^3 - 18{\cdot}x^2 + 16{\cdot}x - 4$$

1. Déterminer les réels a, b, c réalisant l'identité :
$$f(x) = \big(2{\cdot}x - 1\big)\big(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c\big)$$

2. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

Exercice réservé 2256

On considère la fraction rationnelle suivante :
$$Q(x) = \frac{2x^2 + 2x - 8}{9x^2 - 3x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Q.

2. Déterminer l'ensemble des zéros de cette fonction.

12. Problèmes et évolutions :

Exercice 8194

Néo a ouvert un compte en 2017 et place le 1er Janvier 2017, le 1er Janvier 2018, le 1er Janvier 2019 toujours la même somme qu'on notera x.
Son compte est rémunéré à un taux constant 4 % par an.

Sachant que son compte est crédité, au 1er Janvier 2019, de 468,24 €, déterminer la somme x déposée par Néo chaque année sur son compte.

Exercice 8195

Un objet coûte au départ 128 € puis subit une réduction de t % pour finalement subir une augmentation de t %. Son nouveau prix est de 126 €.

Déterminer la valeur du nombre t associé à chacune de ces évoluations.

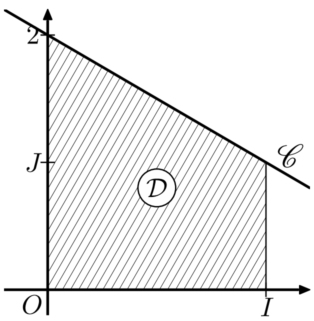
255. Exercices non-classés :

Exercice 6754

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = 2 - x \quad \text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } \big[0\,;1\big].$$

On admet que :
$$f(x) > 0, \quad \text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } \big[0\,;1\big].$$

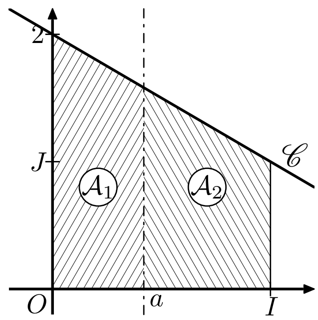
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé, et $\mathcal{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathcal{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées *(partie* **A***)*, puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses *(partie* **B***)*.

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.
On note $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox), les droites d'équations $x=0$ et $x=a$, puis $\mathcal{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x=a$ et $x=1$.
$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



Déterminer la valeur de a afin que les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ soient égales.

Partie B

Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y=b$.
On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

Déterminer la valeur de b.

Exercice 6786

1. Vérifier que : $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$

2. Existe-t-il d'autres séries de 5 entiers naturels consécu-

tifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des plus petits?