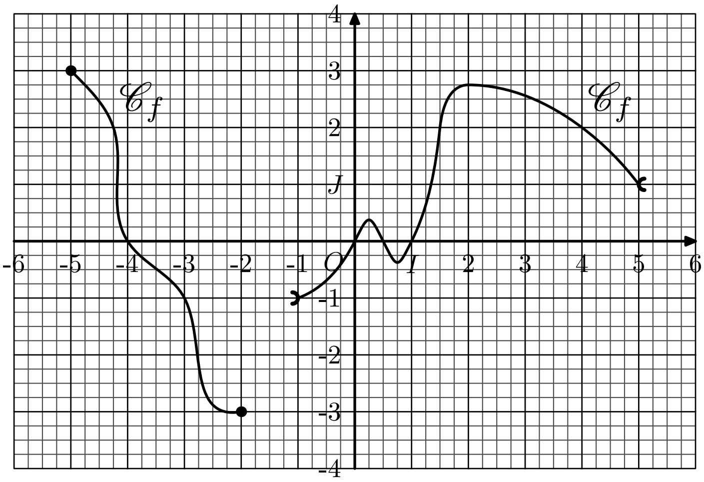
Première Spécialité/Etudes de fonctions

1. Rappels - généralités :

Exercice 532

On munit le plan du repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé. Ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



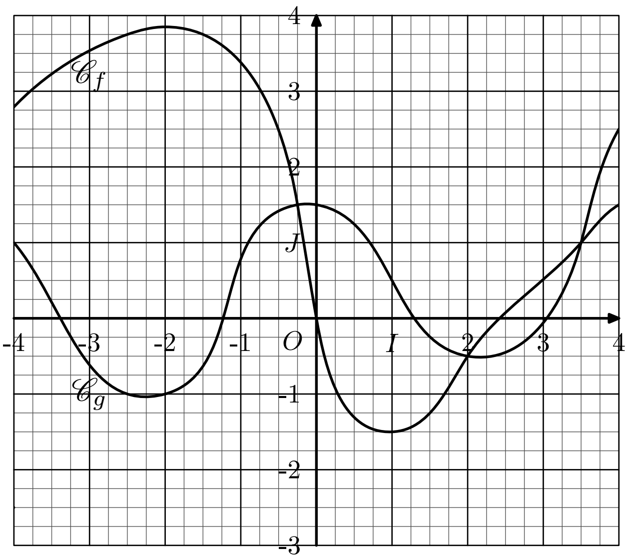
1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer, graphiquement, l'image des nombres suivants par la fonction f :

   a. -3 b. 1 c. 2
3. Déterminer, graphiquement, l'ensemble des antécédents du nombre de 2 par la fonction f.
4. a. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geqslant 2$.

   b. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)<0$.

Exercice 2142

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4\,;4]$:



On considère l'inéquation : $f(x)<g(x)$

1. Parmi les nombres ci-dessous, lesquels sont solutions de cette inéquation :

   a. $-2{,}5$ b. $-0{,}25$ c. 1
2. Résoudre graphiquement cette inéquation.

Exercice 2144

Le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est représenté ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
Variation de f	5	↘	3	↗	7	↘	-4	↗	3

Pour chacune des affirmations, dire si elles sont vraies, fausses ou indécidables en justifiant à chaque fois votre réponse :

a. 3 admet le nombre -2 comme antécédent.

b. $f(1)>f(-1)$.

c. $f(2)$ est un nombre positif.

d. Le minimum de la fonction f est -4.

e. Pour $x\in\,]-\infty\,;0]$, on a : $f(x)\geqslant 0$

f. Le nombre 4 admet un unique antécédent.

Exercice 2196

On considère la fonction f dont voici le tableau de variations :

x	-3		0		2		5
Variation de f	‖ $+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-1

1. Dire si les assertions suivantes sont vraies, fausses ou indécidables. Dans chaque cas, justifier votre affirmation :

   a. $\mathcal{D}_f=[-2\,;+\infty[$

   b. Le nombre 2, par la fonction f, n'admet qu'un antécédent.

   c. f est bornée sur son ensemble de définition.

   d. L'image de 4 est un nombre négatif.
2. On donne les informations suivantes à propos de la fonction f : l'image de -1 *(resp. 3)* par la fonction f est 3 *(resp. 0)*.

   Donner, sans justification, l'image des intervalles ci-dessous par la fonction f :

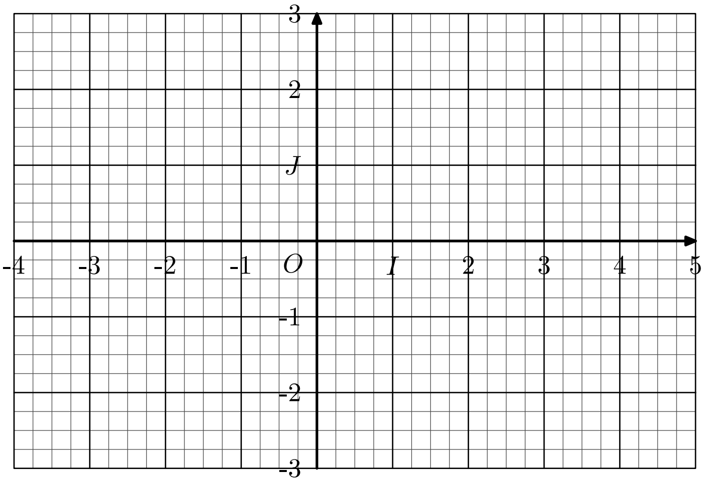
(a.) $[0\,;\,5]$ (b.) $[-1\,;\,2]$ (c.) $]-3\,;3[$

Exercice 2146

On considère une fonction f vérifiant chacune des assertions suivantes :

- La fonction est définie sur $\left]-3{,}5\,;4\right]$.
- Elle est strictement croissante sur $\left]-3{,}5\,;-1\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-1\,;4\right]$;
- Le nombre 2 possède un unique antécédent ;
- L'équation $f(x)\geqslant 0$ admet pour ensemble de solutions l'intervalle $\left[-2\,;1\right]$.

1. Donner les antécédents de 0 par la fonction f.
2. Quel est le maximum de la fonction f ? Pour quelle valeur est-il atteint ?
3. Tracer, à main levée, une courbe pouvant représenter la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormée ci-dessous :



Exercice 8268

1. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'image du nombre 2 :

   (a.) $f : x \longmapsto \dfrac{10-2\cdot x}{3\cdot x}$ (b.) $g : x \longmapsto x^2-2x+1$

2. Déterminer les antécédents du nombre 4 par les fonctions suivantes :

   (a.) $h : x \longmapsto 3\cdot x-5$ (b.) $j : x \longmapsto x^2$

Exercice réservé 730

1. On considère les trois fonctions f, g, h définies par :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2-3x+2}{2x} \quad ; \quad g : x \longmapsto 2^x$$

$$h : x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{7x-3}} \quad ; \quad j : x \longmapsto \frac{(6x-3)^2}{-36x^2+36x-9}$$

   Déterminer les images du nombre 4 respectivement par les fonctions f, g, h et j.

2. On considère les deux fonctions k, ℓ définies par :

$$k : x \longmapsto 4x-5 \quad ; \quad \ell : x \longmapsto 9x^2-6x$$

   (a.) Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre $\dfrac{1}{2}$ par la fonction k.

   (b.) Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre -1 par la fonction ℓ. *(on pensera à une factorisation).*

Exercice 2696

1. Ci-dessous sont présentées trois fonctions dont l'expression a été saisie sur une calculatrice :

   (a.) `Y1=√(1+√(3-X))÷√X+3`

   (b.) `Y2=(3X-2)÷(2√X+1)`

   (c.) `Y3=√(3+X)(2-X)`

   Ré-écrire sur votre copie ces trois fonctions avec la présentation habituelle des expressions mathématiques.

2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, écrire les caractères à saisir dans une calculatrice pour les insérer :

   (a.) $f : x \mapsto \dfrac{1+\dfrac{3+x}{x}}{2-3x}$

   (b.) $f : x \mapsto \sqrt{(1-2x)\times(3x-1)}$

   (c.) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+1}$

Exercice réservé 6755

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés *(pixels)* dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de façon suivante :

- $x=0$ pour le blanc ;
- $x=1$ pour le noir ;
- $x=0{,}01$; $x=0{,}02$ et ainsi de suite jusqu'à $x=0{,}99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires *(du clair au foncé).*

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites "*fonctions de retouche*".
Une fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ est dite "*fonction de retouche*" si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0)=0$;
- $f(1)=1$;
- f est continue sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$;
- f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x)>x$, et éclaircie, si $f(x)<x$.

- si $f(x)=x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0{,}2^2=0{,}04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
- Si $f(x)=\sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2}\approx 0{,}45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

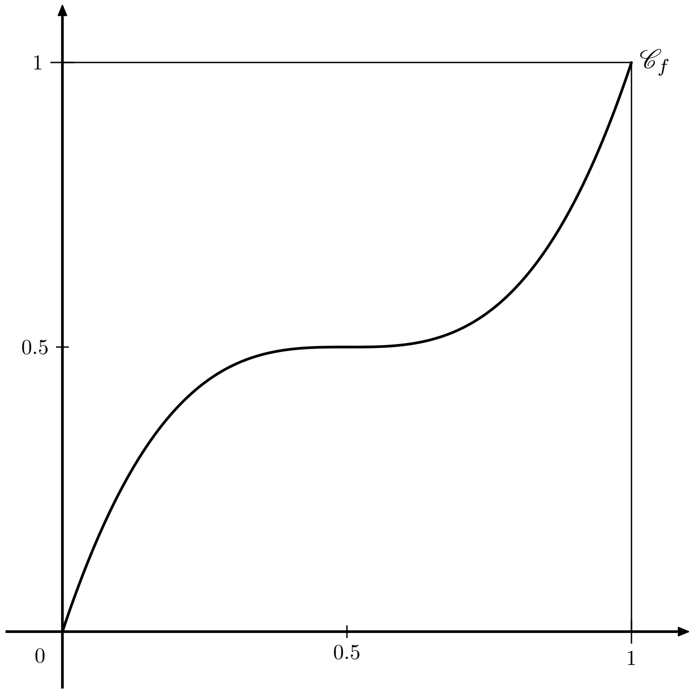
Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ par :
$$f(x)=4x^3-6x^2+3x$$

On admet que la fonction f est une fonction de retouche. Sa courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous :



1. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné ci-dessous, en faisant apparaître les pointillés utiles.

2. Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

Exercice réservé 8311

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $\left[-2\,;12\right]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-2		1		3		7		9		12
Variation de f	3	↗	5	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	3

1. Comparer, si possible, les nombres suivants :

 a. $f(-1)$ et $f(8)$ b. $f(2)$ et $f(5)$ c. $f(0)$ et $f(10)$

2. Donner, par la fonction f, l'image des intervalles :

 a. $\left[1\,;3\right]$ b. $\left[1\,;12\right]$

3. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

Exercice 8312

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

1. Montrer que la fonction f est décroissante sur $\left]1\,;+\infty\right[$

2. a. Soit a et b deux nombres réels distincts de 1. Montrer que :

$$f(a) - f(b) = \frac{b-a}{(a-1)(b-1)}$$

 b. En déduire que la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\,;1\right[$

2. Rappels - fonction affines :

Exercice 8269

Définition :
Une fonction affine f est une fonction admettant une expression de la forme :

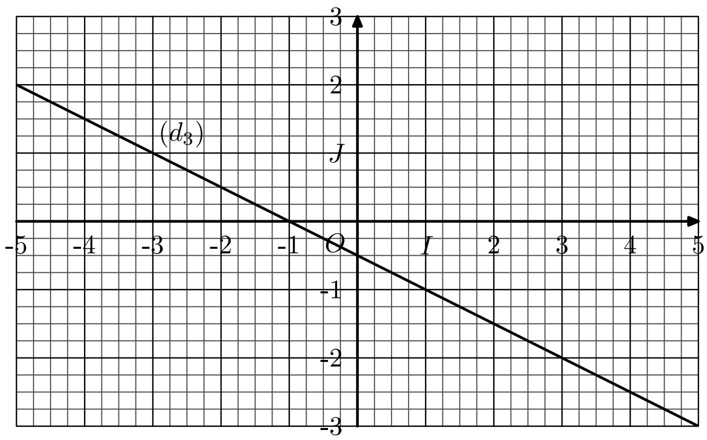
$$f(x) = a{\cdot}x + b \quad a,\, b \in \mathbb{R}$$

Le nombre a s'appelle le **coefficient directeur** et le nombre b s'appelle l'**ordonnée à l'origine**.

Proposition :

- La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.
- Toute droite non-verticale est la représentation d'une fonction affine.
- Le coefficient directeur de la fonction affine est le taux d'accroissement de sa droite représentative. Pour A et B deux points de cette droite, il a pour valeur :
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
- L'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point d'intersection de la droite représentative et de l'axe des ordonnées.

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les quatre droites représentées ci-dessous :



1. On considère la fonction affine f définie par la relation :
$$f(x) = \frac{3}{8}{\cdot}x + \frac{3}{2}$$

 a. Justifier que la droite (d_1), représentative de la fonction f, passe par les points de coordonnées :
$$A(-4\,;0) \quad ; \quad B\left(2\,;\frac{9}{4}\right)$$

 b. Tracer la droite (d_1) sur le graphique.

2. On considère la droite (d_2) représentative de la fonction g. L'ordonnée à l'origine de la fonction g est $-1{,}5$. Ainsi, son expression est de la forme :
$$g(x) = a{\cdot}x - 1{,}5 \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

a. On admet que la droite (d_2) passe par le point de coordonnées $C(2\,;0)$. Déterminer le coefficient directeur de la fonction g.

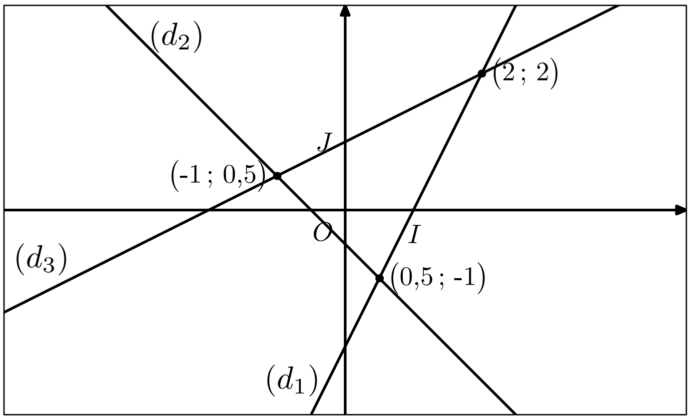
b. Tracer la droite (d_2) sur le graphique.

3. La droite (d_3) passe par les points $D\left(-2\,;\frac{1}{2}\right)$ et $E(1\,;-1)$ est représentative de la fonction affine h.

Déterminer l'expression de la fonction h.

Exercice 2690

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé. On considère les trois droites (d_1), (d_2) et (d_3) représentées ci-dessous :

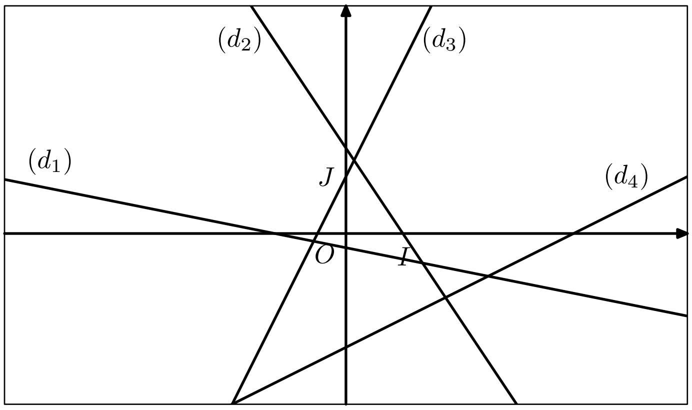


Les coordonnées des points d'intersection de ces droites sont données sur la représentation.

Déterminer les équations réduites de ces trois droites.

Exercice réservé 1965

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les quatre droites représentées ci-dessous :



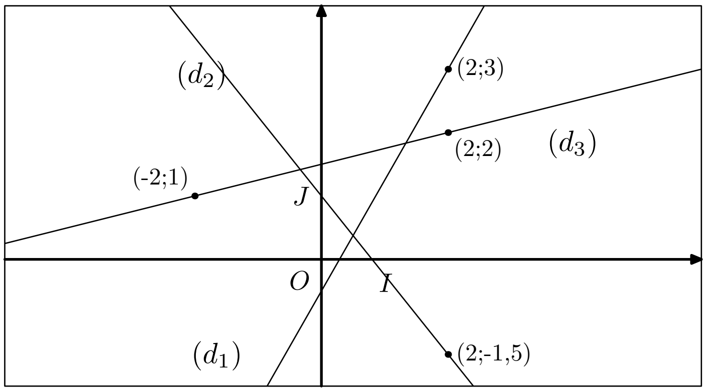
Ces droites admettent pour coefficients directeurs les nombres suivants :

$$-\frac{3}{2} \quad ; \quad -\frac{1}{5} \quad ; \quad \frac{1}{2} \quad ; \quad 2$$

Associer à chacune des droites son coefficient directeur.

Exercice 2129

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les droites (d_1), (d_2) et (d_3) représentées ci-dessous :



Sur la représentation sont données les coordonnées de certains points de ces droites.

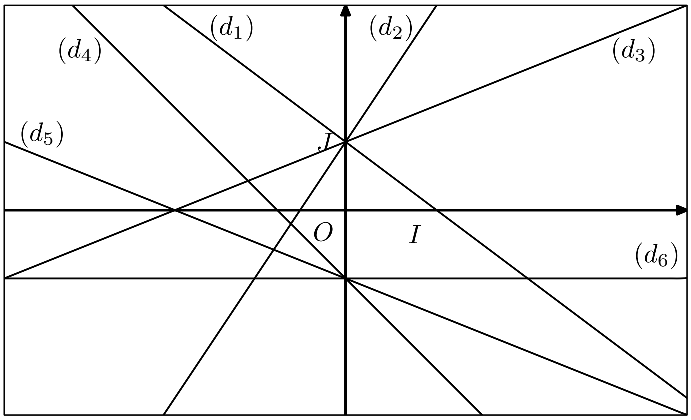
1. Le coefficient directeur de la droite (d_1) a pour valeur $\frac{7}{4}$. Déterminer l'équation réduite de la droite (d_1).

2. L'ordonnée à l'origine de la droite (d_2) a pour valeur 1. Déterminer l'équation réduite de la droite (d_2).

3. Déterminer l'équation réduite de la droite (d_3).

Exercice réservé 2691

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les six droites représentées ci-dessous :



Chaque droite est la représentation de l'une des six fonctions suivantes :

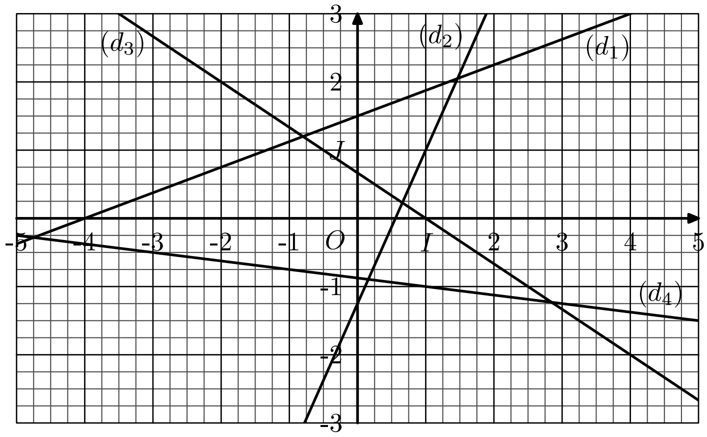
$f\colon x \longmapsto \frac{3}{2}\cdot x+1$; $g\colon x \longmapsto -x-1$; $h\colon x \longmapsto \frac{2}{5}\cdot x+1$

$j\colon x \longmapsto -\frac{2}{5}\cdot x-1$; $k\colon x \longmapsto -\frac{3}{4}\cdot x+1$; $\ell\colon x \longmapsto -1$

Associer, par des raisonnements et sans calculs, la courbe représentation à chaque fonction.

Exercice 2192

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les quatre droites représentées ci-dessous :



Déterminer les équations réduites de ces quatre droites.

Exercice réservé 7866

On définit deux fonctions f, g affines par les relation :

$$f(x) = 3x + 4 \quad ; \quad g(x) = -x + 2$$

On s'aidera du sens de variation de ces deux fonctions pour répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer les images de l'intervalle $[-2\,;5]$ par chacune des fonctions f et g.

2. Déterminer l'intervalle I tel que son image par f soit $\mathbb{R}_+$; c'est à dire vérifiant la relation : $f\big(I\big) = \mathbb{R}_+$

3. Déterminer l'intervalle J tel que son image par g soit $\mathbb{R}_+$; c'est à dire vérifiant la relation : $g\big(J\big) = \mathbb{R}_+$

