Première Spécialité/Produit scalaire

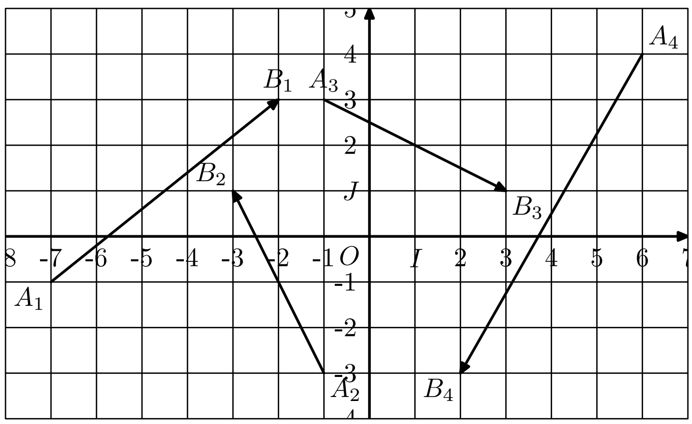
1. Rappels :

Exercice 6486

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$. On considère les points A et B de coordonnées :
$A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$

Dans le repère orthonormé $(O;I;J)$ ci-dessous, sont représentés quatres vecteurs :



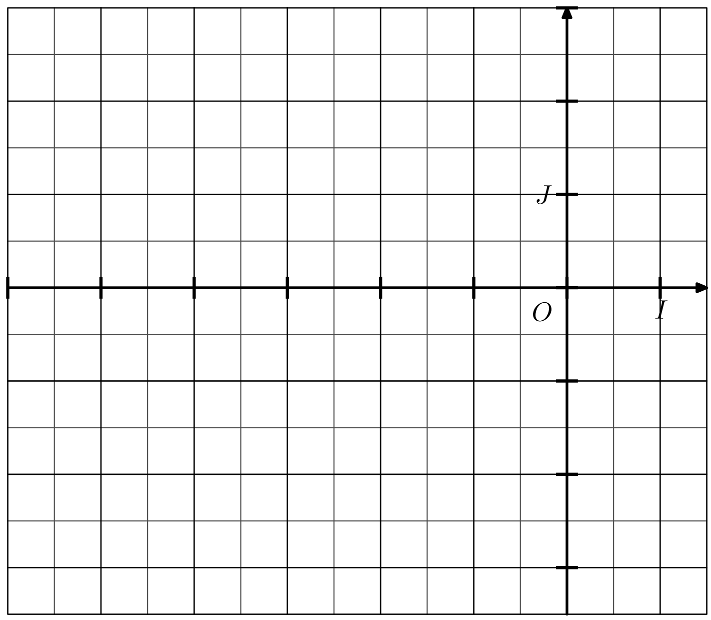
Graphiquement, déterminer les coordonnées de ces quatres vecteurs.

Exercice 6481

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$. On considère les points A et B de coordonnées :
$A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$.

- La distance AB est définie par :
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
- Notons K le milieu du segment $[AB]$. Le point K a pour coordonnées :
$$K\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé, on considère les trois points suivants :
$A(-4;-2)$; $B(-1;2)$; $C(-2{,}5;-2{,}5)$



1. Placer les points A, B et C.

Le graphique sera complété au fur et à mesure des questions l'exercice.

2. a. Déterminer les longueurs AC et BC.
   b. On admet que le segment $[AB]$ a pour longueur 5. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
3. On note K le milieu du segment $[AB]$.
   a. Montrer que le point K a pour coordonnées : $K(-2{,}5;0)$.
   b. Déterminer la longueur KC.
   c. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre K et passant par le point A.

Exercice 7146

Propriétés caractérisantes du parallélogramme :

Soit $ABCD$ un quadrilatère.

- Si les diagonales de $ABCD$ se coupent en leurs milieux alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si les côtés opposés de $ABCD$ sont parallèles deux à deux alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si les côtés opposés de $ABCD$ sont de même longueur alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si deux des côtés opposés sont parallèles et de même longueur alors $ABCD$ est un parallélogramme.

On considère les quatre points suivants caractérisés par leurs coordonnées dans un repère $(O;I;J)$ orthonormé :

$A(2;3)$; $B(-2;1)$; $C(-4;-3)$; $D(0;-1)$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 6482

Propriété caractérisante du rectangle :

Soit $ABCD$ un quadrilatère :

- Si $ABCD$ possède trois angles droits alors $ABCD$ est un rectangle.

Soit $ABCD$ un parallélogramme :

- Si $ABCD$ a ses diagonales de même longueur alors $ABCD$ est un rectangle.
- Si $ABCD$ a un angle droit alors $ABCD$ est un rectangle.

On considère les quatre points suivants caractérisés par leurs coordonnées dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :

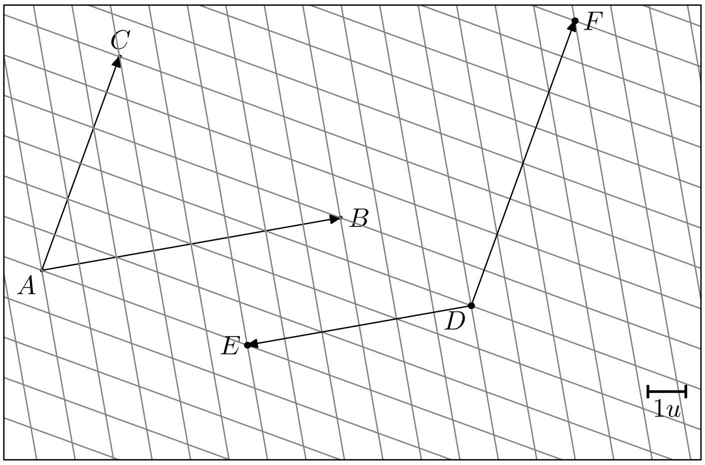
$$A(-4\,;-1) \quad ; \quad B(-3\,;-4) \quad ; \quad C(3\,;-2) \quad ; \quad D(2\,;1)$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

2. Introduction :

Exercice 7432

Dans le plan, on considère les six points et les quatre vecteurs représentés ci-dessous :



On utilisera pour la mesure des longueurs l'unité représenté en bas à droite.

Partie A

1. a. Représenter le point M projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

   b. Déterminer la valeur du produit : $AB\times AM$

2. a. Représenter le point N projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).

   b. Déterminer la valeur du produit : $AN\times AC$

Définition :

Dans le plan, on considère trois point A, B, C *(on suppose B distinct de A)*. On note H le projeté du point C sur la droite (AB). On définit le **produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$** comme le nombre défini par :

- $AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens
- $-AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens opposés.

On note ce nombre $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

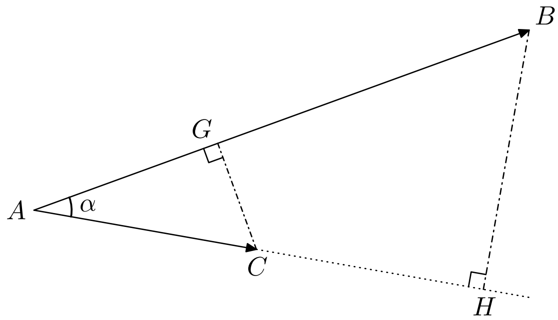
3. Que peut-on dire de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$?

Partie B

4. Montrer que : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=-24$
5. Justifier que : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE}$

Exercice 8439

On considère trois points A, B, C distincts deux à deux représentés ci-dessous :



On note G *(resp. H)* le projeté orthogonal du point C *(resp. B)* sur la droite (AB) *(resp. (AC))* :

1. a. Dans le triangle AGC rectangle en G, donner l'expression de $\cos\alpha$.

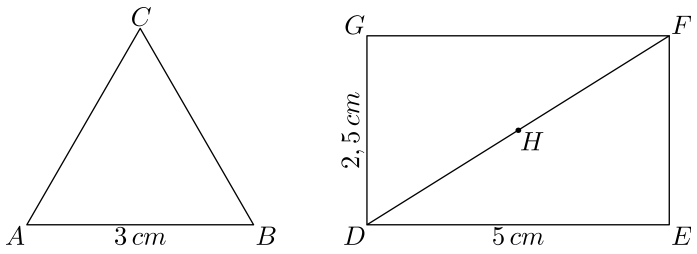
   b. Dans le triangle ABH rectangle en H, donner l'expression de $\cos\alpha$.

2. En déduire l'égalité : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

3. Produit scalaire et projection :

Exercice 8440

Dans le plan, on considère les deux configurations ci-dessous :

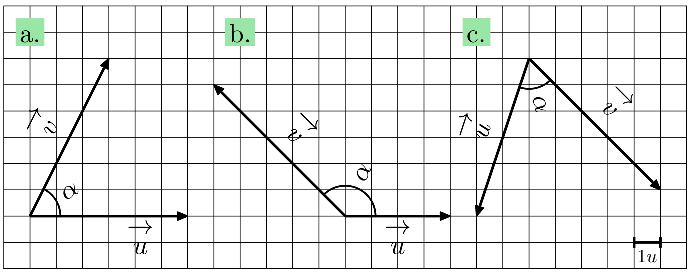


1. Dans le triangle équilatéral ABC, déterminer les produits scalaires suivants :
   a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ b. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}$
2. Dans le rectangle $DEFG$ où le point H est le milieu de la diagonale $[DF]$, déterminer les produits scalaires :
   a. $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE}$ b. $\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DE}$ c. $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{HD}$

4. Produit scalaire et cosinus :

Exercice 8441

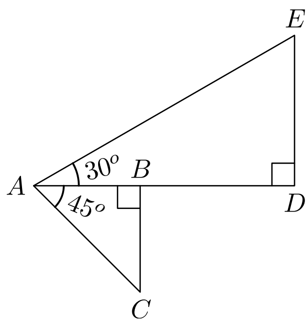
On considère les trois configurations présentant à chaque fois deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:



1. Pour chaque question, déterminer les valeurs suivantes :
   $\|\overrightarrow{u}\|$; $\|\overrightarrow{v}\|$; $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
2. Déterminer la mesure de l'angle α au dixième de degré près.

Exercice 2574

On considère la figure ci-dessous où : $AE=4\,cm$ et $AC=2\,cm$
et on munit le plan du repère orthonormé, orienté dans le sens direct, dont l'unité mesure $1\,cm$, et dont l'axe des abscisses est la droite (AD).



Déterminer la valeur des produits scalaires ci-dessous :

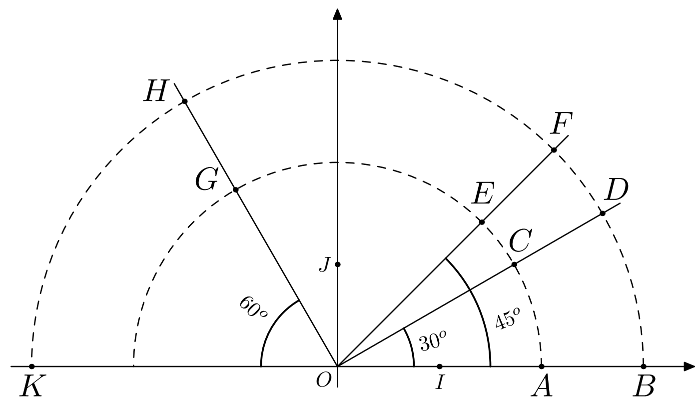
a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$ b. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ c. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}$

Rappels :

α	0	30^o	45^o	60^o	90^o
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Exercice 2573

On considère le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



où les angles sont indiqués en radian et les deux demi-cercles vérifient : $OA=2\,cm$ et $OB=3\,cm$

1. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires :
   a. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ b. $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OB}$
2. Déterminer les valeurs approchées au dixième près des produits scalaires :
   a. $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}$ b. $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OH}$

Rappels :

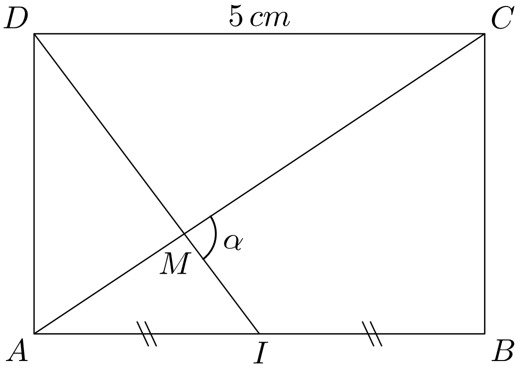
α	0	30^o	45^o	60^o	90^o
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Exercice réservé 3014

Dans le plan, on considère le rectangle $ABCD$ tel que :

$AB=5\,cm$; $BC=\dfrac{2}{3}\cdot AB$

I est le milieu du segment $[AB]$; les droites (AC) et (ID) s'interceptent au point M.



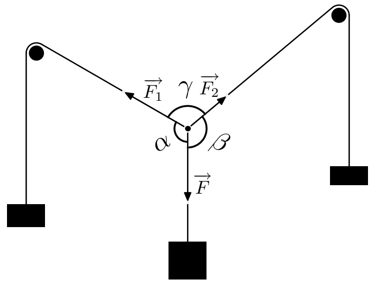
1. En exprimant les vecteurs à l'aide de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$, déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{AC}$

2. a. Déterminer les longueurs des segments $[DI]$ et $[AC]$.

   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{IMC}$ au dixième de degré près.

Exercice 3034

Le schéma ci-dessous représente un système de poulis à l'équilibre. Chacun des poids exercice sur le noeud proportionnellement à son poids.



On donne les informations suivantes:

$$\left\|\overrightarrow{F_1}\right\| = 8\,N \quad ; \quad \left\|\overrightarrow{F_2}\right\| = 6\,N \quad ; \quad \left\|\overrightarrow{F}\right\| = 12\,N$$

On note R la résultante de toutes ces forces:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$

1. Déterminer en fonction de $alpha$, β et γ les trois produits scalaires suivants:

$$\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F_1} \quad ; \quad \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F_2} \quad ; \quad \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{F}$$

2. On suppose maintenant que ce système est en position d'équilibre, ainsi on a $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$.

   a. Montrer que les mesures des angles vérifient le système suivant:

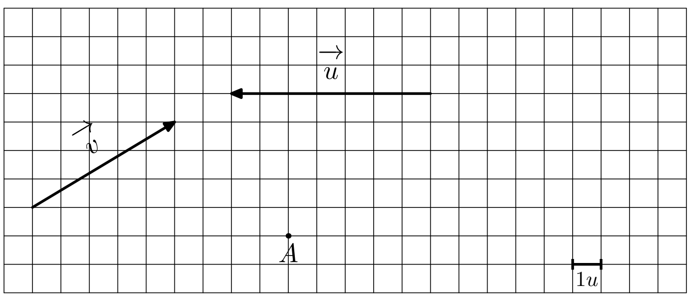
$$\begin{cases} 4\cdot\cos\alpha + 3\cdot\cos\beta + 6 = 0 \\ 6\cdot\cos\alpha + 3\cdot\cos\gamma + 4 = 0 \\ 6\cdot\cos\beta + 4\cdot\cos\gamma + 3 = 0 \end{cases}$$

   b. En déduire les valeurs de α, β, γ pour la position d'équilibre.

5. Produit scalaire et propriétés algébriques :

Exercice 8442

On considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ représentés ci-dessous:



1. a. Placer les points B et C tels que:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$$

   b. Déterminer la valeur de: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.

2. a. Placer le point D tel que: $2\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$.

   b. Déterminer la valeur de: $\overrightarrow{u}\cdot(2\cdot\overrightarrow{v})$.

3. Quel relation peut-on établir?

Exercice 8445

Dans cet exercice, nous allons vérifier la validité de l'identitié ci-dessous dans des cas particuliers:

$$\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)$$

Pour cela, on considère 4 points A, B, C et D tels que:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$$

Pour étudier la diversité des configurations possibles, nous devrions étudier 4 disjonctions de cas: deux seulement sont proposées ici.

Partie A

Les projetés des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sur la direction du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont dans le même sens que le vecteur $\overrightarrow{u}$.

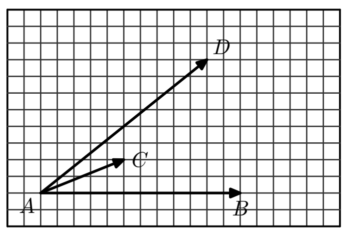


Fig. 1

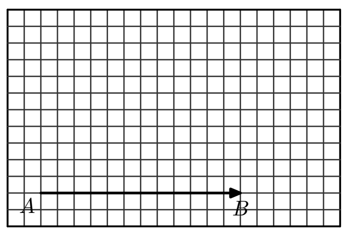


Fig. 2

1. a. Placer le point H *(resp. I)* projeté orthogonal du point C *(resp. D)* sur la droite (AB).

   b. Déterminer la valeur de: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$

2. a. Placer le point J vérifiant la relation:

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

   Placer le point K projeté orthogonal du point J sur la droite (AB).

   b. Déterminer la valeur de: $\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)$

Partie B

Le projeté du vecteur $\overrightarrow{v}$ *(resp.* $\overrightarrow{w}$*)* sur la direction du vecteur $\overrightarrow{u}$ est dans le même sens *(resp. dans le sens opposé)* que le vecteur $\overrightarrow{u}$.

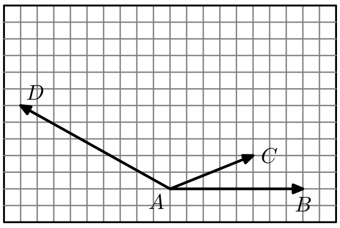


Fig. 1

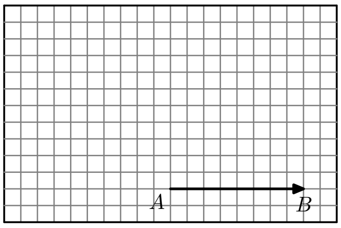


Fig. 2

3. a. Placer le point H *(resp.* I*)* projeté orthogonal du point C *(resp.* D*)* sur la droite (AB).

b. Déterminer la valeur de : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$

4. a. Placer le point J vérifiant la relation : $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$

Placer le point K projeté orthogonal du point J sur la droite (AB).

b. Déterminer la valeur de : $\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)$

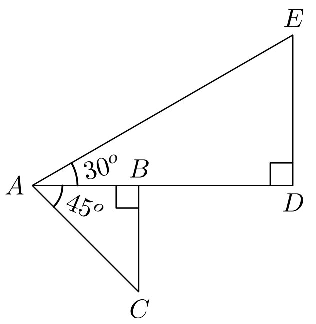
Partie C

5. Quelle conjecture peut-on émettre sur les deux nombres : $\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)$; $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$

6. Orthogonalité et colinéarité :

Exercice 8443

On considère la figure ci-dessous où : $AE=4\,cm$ et $AC=2\,cm$
et on munit le plan du repère orthonormé, orienté dans le sens direct, dont l'unité mesure $1\,cm$, et dont l'axe des abscisses est la droite (AD).



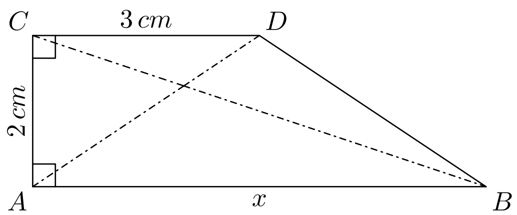
1. Déterminer les valeurs exactes des longueurs des côtés des triangles ABC et ADE.

2. Etablir l'égalité :
$$\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=AD\times AB-DE\times BC$$

3. Déterminer la valeur du produit scalaire : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$

Exercice 8214

On considère le trapèze $ABCD$ représenté ci-dessous :

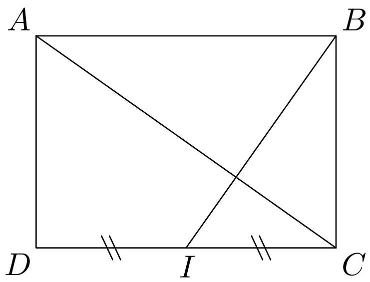


où : $AC=2\,cm$; $CD=3\,cm$

Déterminer la longueur x du segment $[AB]$ afin que les diagonales, $[AD]$ et $[BC]$, du trapèze $ABCD$ soient perpendiculaires.

Exercice 2665

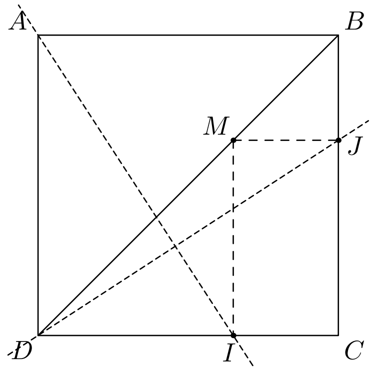
Soit a un nombre réel positif.
On considère le rectangle $ABCD$ tel que :
$$AB=a \quad ; \quad AD=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$$
On note I le milieu de $[CD]$



En se servant uniquement des propriétés algébriques, démontrer que les droites (AC) et (BI) sont perpendiculaires.

Exercice 2673

On considère le carré $ABCD$ ci-dessous. M est un point appartenant à la diagonale $[BD]$.
On note I le projeté orthogonal de M sur (DC) et J le projeté orthogonal de M sur $[BC]$.

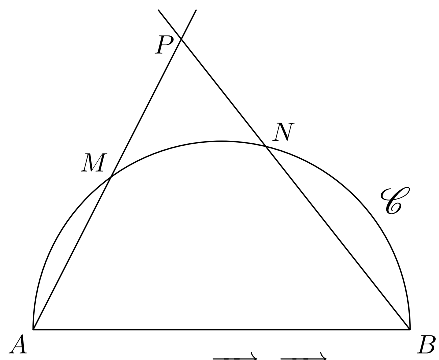


1. Etablir la relation suivante : $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JC}$

2. En déduire que les droites (AI) et (DJ) sont perpendiculaires.

Exercice 3037

Dans le plan, on considère un demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$; soit M et N deux points de $\mathscr{C}$ tels que les demi-droites $[AM)$ et $[BN)$ s'interceptent au point P :



1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$.

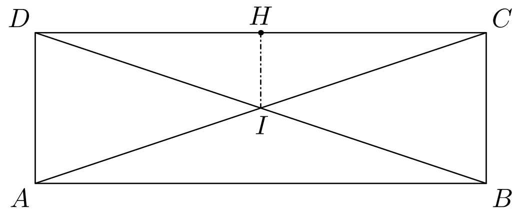
2. Etablir l'égalité suivante :
$$AB^2=AP\times AM+PB\times NB$$

7. Orthogonalité, colinéarité, calcul d'angles :

Exercice 8444

On considère le rectangle $ABCD$ représenté ci-dessous où I est le point d'intersection de ses diagonales et où les dimensions suivantes sont données :

$AB = 6\,cm \quad ; \quad BC = 2\,cm$



1. Etablir l'égalité suivante :
$\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} = \frac{1}{4}\cdot AD^2 - \frac{1}{4}\cdot AB^2 = -\frac{4}{5}$

2. a. Déterminer la longueur du segment $[IC]$.

   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{DIC}$.

8. Produit scalaire et parallélogramme :

Exercice 3011

1. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, établir l'égalité suivante :
$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = 4\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$

2. On considère le parallélogramme $ABCD$ dans le plan.
On note : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$

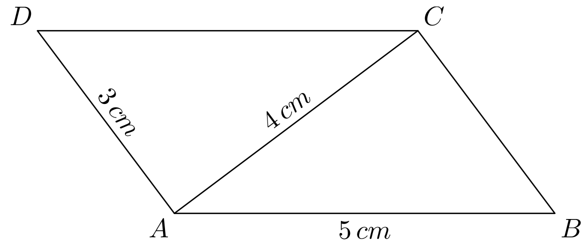
   a. Que représentent les vecteurs $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ pour le parallélogramme $ABCD$?

   b. A l'aide des questions précédentes, établir la proposition suivante :
   "Dans un parallélogramme, les diagonales sont de même longueur si, et seulement si, les côtés adjacents sont perpendiculaires."

Exercice réservé 3015

Dans le plan, on considère le parallélogramme $ABCD$ ayant pour les mesures suivantes :

$AB = 5\,cm \quad ; \quad AC = 4\,cm \quad ; \quad AD = 3\,cm$



1. On rappelle la formule du parallélograme :

   a. Développer l'expression : $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)^2$.

   b. En déduire la valeur de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ en fonction de normes de vecteurs.

2. a. Développer l'expression : $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)^2$.

   b. En déduire la mesure de la diagonale $[BD]$.

9. Coordonnées et produit scalaire :

Exercice 3018

> Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\,(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'\,;y')$.
>
> - Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est un nombre noté $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ défini par :
> $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = x\cdot x' + y\cdot y'$
> - Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé, on considère les quatre points suivants :

$A(-3\,;2) \quad ; \quad B(-2\,;-2) \quad ; \quad C(2\,;-1) \quad ; \quad D(1\,;3)$

1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 7781

On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,I\,;\,J\right)$.

1. On considère les trois points :
$A(-5\,;1) \quad ; \quad B(-3\,;-5) \quad ; \quad C(-2\,;2)$.
Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. On considère les trois points :
$D(-3\,;-2) \quad ; \quad E(1\,;1) \quad ; \quad F\left(2\,;-\frac{26}{3}\right)$.

Montrer que le triangle DEF est rectangle. On précisera le sommet de l'angle droit.

Exercice 7787

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les trois points:

$A(-2\,;1)$; $B(-8\,;-3)$; $D\left(-3\,;\dfrac{5}{2}\right)$

1. Déterminer les coordonnées du point C tels que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 8212

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal.

1. On considère les trois points $A(2\,;1)$, $B(1\,;-2)$ et $C(-1\,;2)$.
   Justifier que le triangle ABC est rectangle en A.

2. On considère les trois points $D(-1\,;3)$, $E\left(3\,;\dfrac{14}{3}\right)$ et $F\left(-\dfrac{1}{6}\,;1\right)$.

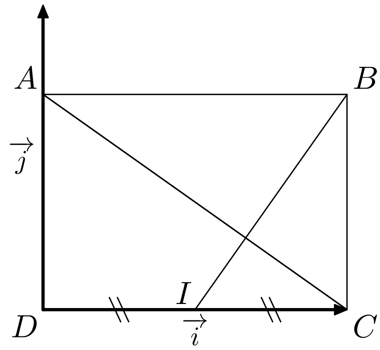
Justifier que le triangle DEF est rectangle.

Exercice réservé 3013

Soit a un nombre réel positif. On considère le rectangle $ABCD$ tel que:

$AB=a$; $AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

On note I le milieu de $[CD]$. Une représentation est donnée ci-dessous:



On considère le plan munit d'un repère orthonormé $(D\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ dans le sens direct où $\vec{i}=\overrightarrow{DC}$:

1. Déterminer les coordonnées des différents points de cette figure.

2. En déduire que les droites (AC) et (IB) sont perpendiculaires.

Question subsidiaire: reprendre la question 2. sans utiliser les coordonnées des points.

10. Coordonnées et recherche des coordonnées d'un point :

Exercice 8432

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les trois points:

$A(-2\,;3)$; $B(4\,;-1)$

et un point C tel que:

- le point C ait pour abscisse 3.
- le triangle ABC est rectangle en B.

Déterminer les coordonnées du point C.

11. Norme d'un vecteur :

Exercice 8433

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, le vecteur $\vec{u}\,(3\,;2)$ et les deux points $A(2\,;-1)$ et $B(4\,;2)$

1. Déterminer la norme du vecteur $\vec{u}$.

2. Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 8434

1. On considère le vecteur $\vec{u}\left(-\dfrac{5}{2}\,;\dfrac{4}{3}\right)$. Montrer que:
   $\|\vec{u}\|=\dfrac{17}{6}$

2. On considère les deux points $A\left(-\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $B\left(\dfrac{8}{3}\,;-2\right)$.

   Montrer que: $\|\overrightarrow{AB}\|=\dfrac{25}{6}$

Exercice 8435

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$. On considère les deux points A et B tels que A ait pour ordonnée $\dfrac{2}{5}$ et $B\left(\dfrac{5}{20}\,;-\dfrac{4}{5}\right)$.

Déterminer l'abscisse du point A tel que: $\|\overrightarrow{AB}\|=\dfrac{5}{4}$

12. Calcul d'angles dans un repère :

Exercice réservé 2596

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et les trois points suivants ainsi que leurs coordonnées dans ce repère:

$A(3\,;2)$; $B(5\,;-1)$; $C(-2\,;3)$

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Donner les valeurs des produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$$

3. Déterminer les distances AB, AC et BC.
4. Déterminer la mesure des 3 angles du triangle ABC arrondis au degré près.

Exercice 8527

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$:

Soit A, B, C trois points du plan de coordonnées respective $(-2;3)$, $(1;-4)$ et $(0;-2)$

1. Déterminer les valeurs de $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\|\overrightarrow{BA}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\|$.
2. En déduire la mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$ au centième près de degrés.

Exercice 2593

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$.

Déterminer une mesure de l'angle orienté $\widehat{EDF}$ où $D(3;5)$, $E(-1;0)$, $F(2;4)$ au centième de degré près.

Exercice 7849

On considère le plan muni du repère $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ orthonormé et les points A, B, C de coordonnées :

$$A(1;1) \quad ; \quad B(4;2) \quad ; \quad C(3;-1)$$

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ au dixième de degrés près.

13. Produit scalaire et manipulations algébriques :

Exercice 3016

On considère le plan muni d'un repère $\big(O;I;J\big)$ orthonormé et les trois points suivants :

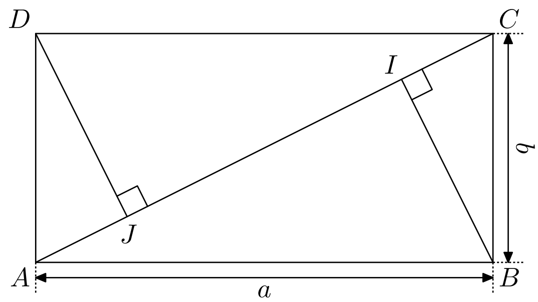
$$A(2;3) \quad ; \quad B(6;5) \quad ; \quad C(0;6)$$

On note : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

1. a. Déterminer les normes $\left\|\vec{u}\right\|$ et $\left\|\vec{v}\right\|$.
   b. Déterminer la valeur de : $\vec{u}\cdot\vec{v}$
2. a. Développer l'expression : $\left(3\times\vec{u}-2\times\vec{v}\right)^2$.
   b. En déduire la norme : $\left\|3\times\vec{u}-2\times\vec{v}\right\|$.

Exercice réservé 3081

On considère, dans le plan, le rectangle $ABCD$ de longueur a et de largeur b ; on note J et I les projetés orthogonaux sur la droite (AC) respectivement des points D et B :

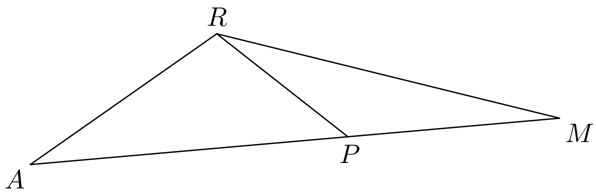


1. a. Justifier l'égalité suivante : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-AC\times IJ$
   b. Justifier l'égalité suivante : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=b^2-a^2$
2. En déduire l'expression de la longueur IJ en fonction de a et de b.

14. Formule d'Al-Kashi : déterminer une longueur :

Exercice 6687

On considère la configuration ci-dessous :



1. Ecrire les trois formules d'Al-Kashi dans le triangle ARP.
2. Ecrire la formule de l'égalité des sinus dans le triangle RPM

Exercice 8528

On considère le triangle ABC dont les mesures sont :

$AC=3{,}7\,cm$; $BC=7\,cm$; $\widehat{ACB}=48^o$

Les formules d'Al-Kashi appliquées à ce triangle donne :

- $AB^2=AC^2+BC^2-2\times AC\times BC\times\cos\widehat{ACB}$
- $AC^2=AB^2+BC^2-2\times AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$
- $BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

Déterminer la mesure, au millimètre près, du segment $[AB]$.

Exercice 8529

On considère un triangle ABC vérifiant les mesures :

$$AB=5\,cm \quad ; \quad AC=3\,cm \quad ; \quad \widehat{ABC}=30^o$$

Déterminer les mesures possible du segment BC réalisant ces conditions.

15. Formule d'Al-Kashi : déterminer un angle :

Exercice 2590

On considère le triangle ABC dont les mesures sont :
$AB = 5{,}3\,cm$; $AC = 3{,}7\,cm$; $BC = 7\,cm$

Les formules d'Al-Kashi appliquées à ce triangle donne :

- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\times AC\times BC\times \cos\widehat{ACB}$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\times AB\times BC\times \cos\widehat{ABC}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times \cos\widehat{BAC}$

Déterminer la mesure, au dixième de degrés près, des angles du triangle ABC.

Exercice 6706

Déterminer la mesure, au dixième de degrés près, des angles du triangle ABC ayant les mesures suivantes :

$AB = 6{,}4\,cm$; $AC = 4{,}8\,cm$; $BC = 8\,cm$

Exercice 7850

On considère le triangle ABC dont les mesures sont :
$AB = 5{,}5\,cm$; $AC = 6{,}2\,cm$; $BC = 4{,}7\,cm$

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degrés près.

16. Caractérisation des points du cercle :

Exercice 8437

Soit A et B deux points distincts du plan. On note I le milieu du segment $[AB]$.

1. Etablir, pour tout point M du plan, la relation :
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \|\overrightarrow{MI}\|^2 - \|\overrightarrow{AI}\|^2$

2. Considérons un point C tel que le triangle ABC soit rectangle en C.

   a. Etablir que : $IC = IB = IA$

   b. Que peut-on dire du point C relativement au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$?

3. Réciproquement, que peut-on dire du triangle ABM si le point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$? Etablir cette propriété.

Exercice 8436

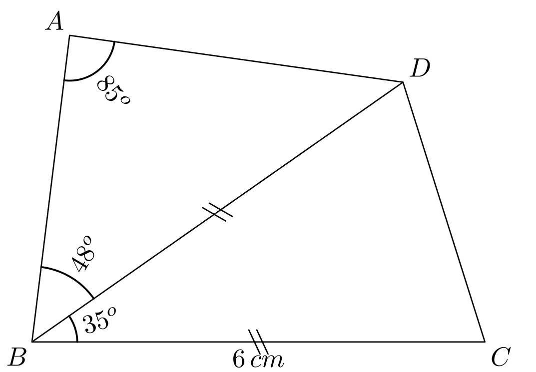
Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les points A et B de coordonnées : $A(-2\,;3)$; $B(3\,;0)$
et le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.

Déterminer les coordonnées des deux points du cercle $\mathscr{C}$ ayant pour abscisse 1.

17. Approfondissement : Formule des sinus :

Exercice 2674

On considère le quadrilatère $ABCD$ représenté ci-dessous :



1. Les formules d'AL-Kashi donne la formule :
$DC^2 = BD^2 + BC^2 - 2\times BD\times BC\times \cos\widehat{DBC}$

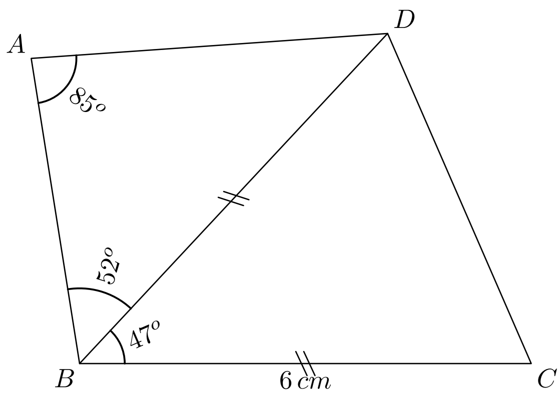
   En déduire la mesure de la longueur DC arrondie au millimètre près.

2. La formule des sinus exprimés dans le triangle ABD s'exprime par :
$$\frac{\sin\widehat{DBA}}{AD} = \frac{\sin\widehat{ADB}}{AB} = \frac{\sin\widehat{DAB}}{DB}$$

   En déduire les mesures des longueurs AB et AD arrondie au millimètre près.

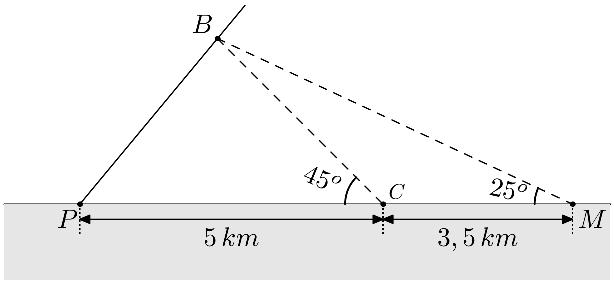
Exercice 6707

Déterminer les mesures des quatre côtés du quadrilatère $ABCD$ au millimètre près.



Exercice 2664

Un bateau B rejoint le port P en ligne droite ; sur le bord de la rive, Marc et Cléa regarde le bateau rentré au port.



1. a. Déterminer les mesures des angles du triangle BCM.

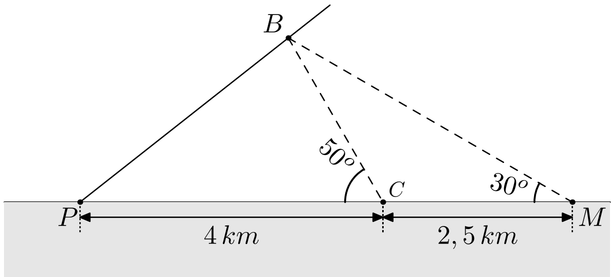
   b. La formule des sinus s'exprime dans le triangle MBC par :
   $$\frac{\sin\widehat{BCM}}{BM}=\frac{\sin\widehat{CMB}}{CB}=\frac{\sin\widehat{MBC}}{MC}$$
   En déduire la longueur BC arrondie à l'hectomètre près.

2. Dans le triangle CBP, les formules d'Al-Kashi s'exprime par :
   - $PC^2=PB^2+BC^2-2\times PB\times BC\times\cos\widehat{PBC}$
   - $PB^2=PC^2+BC^2-2\times PC\times BC\times\cos\widehat{PCB}$
   - $CB^2=CP^2+PB^2-2\times CP\times PB\times\cos\widehat{CPB}$

   En déduire la distance séparant le bateau du port arrondie à l'hectomètre près.

Exercice réservé 6710

Un bateau B rejoint le port P en ligne droite ; sur le bord de la rive, Marc et Cléa regarde le bateau rentré au port.



Les longueurs seront arrondies au centaine de mètres près.

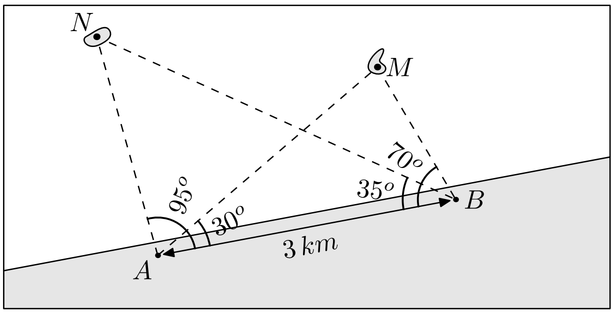
1. Dans le triangle MCB, déterminer la longueur BC.
2. En déduire la distance séparant le bateau du port.

Exercice 3084

Deux observateurs souhaitent mesurer la distance séparant les deux phares présents près de leur côte. Pour cela, ils se séparent de $3\,km$ et effectuent les mesures d'angles suivants :

$\widehat{MAB}=30^o$; $\widehat{MBA}=70^o$; $\widehat{NAB}=95^o$; $\widehat{ABN}=35^o$

Le schéma ci-dessous représente cette situation :



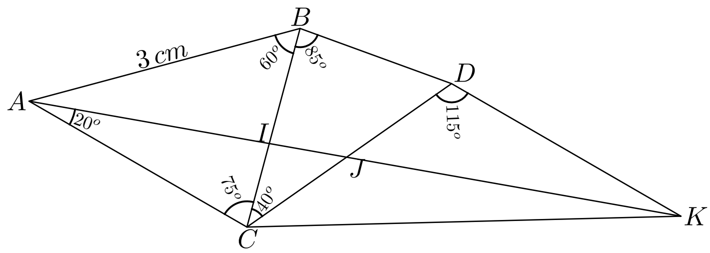
1. a. Déterminer la longueur du segment $[AN]$ *(au mètre près)*.

   b. Déterminer la longueur du segment $[AM]$ *(au mètre près)*.

2. Déterminer la longueur du segment $[MN]$ *(à l'hectomètre près)*.

Exercice réservé 3041

On considère la configuration ci-dessous où la droite (AK) intercepte les segments $[BC]$ et $[DC]$ respectivement en I et J :



Déterminer, au millimètre près, la longueur AK. *(les résultats intermédiaires doivent avoir une précision de 10^{-3} cm)*

18. Approfondissement : Droites remarquables et concourance :

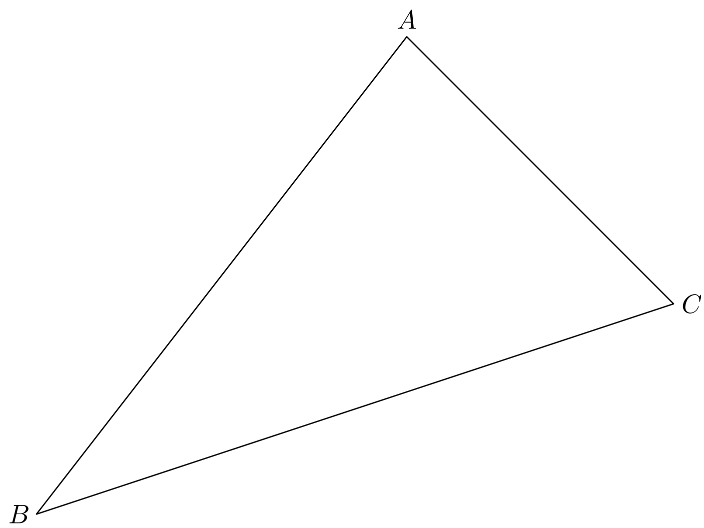
Exercice 2661

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Démontrer que pour tout point M du plan, on a la relation :
   $$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$
2. En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H.

Exercice 8438

On considère le triangle ABC représenté ci-dessous :



On note I le milieu du segment $[AB]$ et on définit le point G par la relation vectorielle : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{IC}$

1. a. Placer le point G dans la figure ci-dessus.

   b. Justifier que le point G appartient à la médiane du triangle ABC issue du sommet C.

2. a. Etablir que le point G vérifie la relation vectorielle : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

   b. Réciproquement, montrer que le point G est le seul point M du plan vérifiant la relation vectorielle : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

3. On note J le milieu du segment $[AC]$ et H le point du plan défini par la relation : $\overrightarrow{JH} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{JB}$

   a. Montrer que le point H vérifie la relation vectorielle : $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$

   b. Que peut-on dire du point H ? Justifier vos réponses.

4. De même, montrer que le point G appartient à la médiane du triangle ABC issue du point C.

255. Exercices non-classés :

Exercice 2662

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A. I, J, K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$.

1. Etablir la relation suivante : $HA^2 = HB\times HC$

2. a. Etablir la relation vectorielle suivante : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK}$

   b. Démontrer que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

Exercice 7786

Dans le plan muni d'un repère, on considère les deux droites (d) et (Δ) admettant pour équation :

(d) : $y = 3\cdot x - 1$; (Δ) : $2\cdot x + 6\cdot y + 4 = 0$

1. Démontrer que les droites (d) et (Δ) sont perpendiculaires.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (Δ).

