# Thème 1 : modèles définis par une fonction

1) Rappels des formules de dérivées et compléments :

| Fonction $f$ | Dérivée $f'$ | | Fonction $f$ | Dérivée $f'$ |
|---|---|---|---|---|
| Constante | 0 | | $u+v$ | $u'+v'$ |
| $ax+b$ | $a$ | | $k\times u$ | $k\times u'$ |
| $x^2$ | $2x$ | | $u\times v$ | $u'\times v+u\times v'$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | | $\frac{1}{v}$ | $\frac{-v'}{v^2}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\frac{-1}{x}{}^2$ | | $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | | $u^2$ | $2\times u'\times u$ |
| $e^x$ | $e^x$ | | $e^u$ | $u'\times e^u$ |

<u>Complément</u> :
D'une manière générale, quand on dérive une fonction composée (on note v o u (x)= v(u(x))) on utilise la formule de gauche en remplaçant x par u et un u' apparaît en facteur multiplicatif ( $u'\times v'(u)$ ).

<u>Rappel</u> :
Si $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle I et *a* un réel de I, la tangente à la courbe représentative de *f* en *a* est la droite qui passe par le point $A(a\,;f(a))$ et qui à comme coefficient directeur *f'(a).*
Elle admet pour équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

2) Continuité et TVI :

a) Une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe se trace d'un trait continu sans lever le crayon. Il existe bien sur une définition plus mathématique qui fait intervenir la notion de limite que l'on verra plus tard.

b) Toute fonction dérivable est continue.

Remarque : La réciproque est fausse, on a déjà vu deux contre exemples l'année dernière : la fonction racine carrée est continue en 0 mais pas dérivable. De même la fonction valeur absolue. Ce sont les seuls cas que vous connaissez. Toutes les autres fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition. Attention à la fonction *inverse* qui est continue sur $]0\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;0[$ .

c) Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit une fonction continue sur $[a\,;b]$ . Pour tout nombre réel *k* compris entre *f(a)* et *f(b)* l'équation admet au moins une solution entre *a* et *b.*
Encore plus fort ! Si *f* est strictement monotone ( croissante ou décroissante) alors la solution est unique !

C'est un magnifique outil pour trouver des solutions à des équations que l'on ne sait pas résoudre avec les méthodes classiques.

3) Convexité :

a) Une fonction est convexe sur un intervalle I, si sa représentation graphique est située entièrement au dessus de chacune de ses tangentes.
C’est équivalent au fait que sa dérivée soit croissante sur I.
C’est équivalent au fait que sa dérivée seconde ( $f''$ ) soit positive sur I.

b) Une fonction est concave sur un intervalle I, si sa représentation graphique est située entièrement en dessous de chacune de ses tangentes.
C’est équivalent au fait que sa dérivée soit décroissante sur I.
C’est équivalent au fait que sa dérivée seconde ( $f''$ ) soit négative sur I.

c) Lorsque une fonction change de convexité au point d’abscisse $a$, on parle de point d’inflexion.
Cela revient au fait que la courbe traverse la tangent en ce point, que la dérivée change de sens de variations et que $f''$ change de signe et s’annule en $a$.