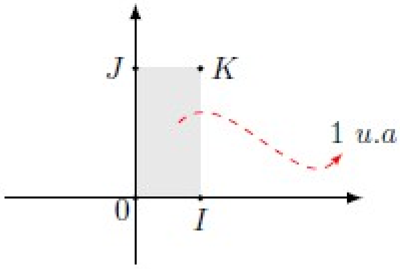
Intégration

Définition : Soit (O ; I ; J) un repère orthogonal du plan et K le point de coordonnées (1; 1).
On appelle **unité d'aire** (noté $u.a$) l'aire du rectangle ($OIKJ$).



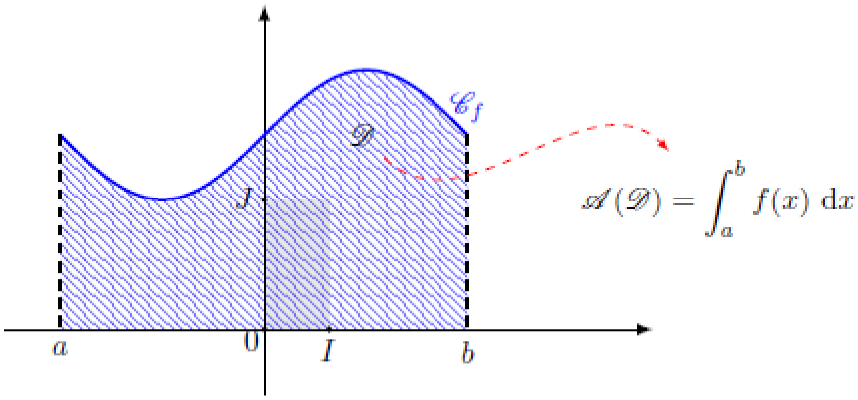
I - Intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle :

1. Définition :

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a\,;b]$ (avec $a \leqslant b$). On note C_f la courbe représentant la fonction f dans un repère orthogonal (O ; I ; J) du plan.

On appelle Intégrale de a a b de la fonction f et on note $\int_a^b f(x)dx$ l'aire A (D) (en $u.a$) de la partie D du plan limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Ainsi $\int_a^b f(x)dx$ = A (D) en $u.a$



Remarque :

On a aussi bien : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$

Exemples :

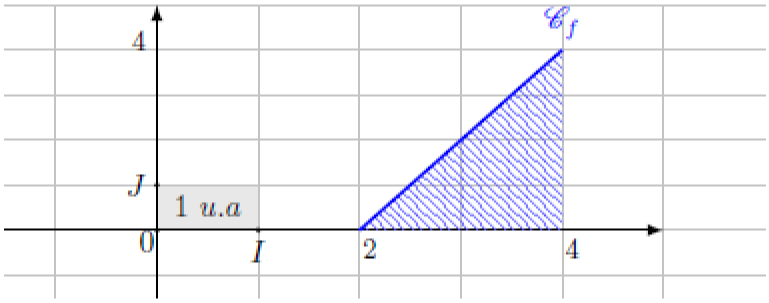
Soit $(O\,;I\,;J)$ un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

a. Soit f la fonction définie sur l'intervalle [2 ; 5] par l'expression $f(x) = 4$.

$\int_2^5 f(x)dx =$ .... L'aire comprise entre C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x =$ ..... et $x =$ .... est donc de ....

Or ici 1 $u.a$ vaut ...., donc l'aire vaut ....

b. Soit f la fonction définie sur l'intervalle [2 ; 4] par l'expression $f(x)=2x-4$. Calculer $\int_2^4 f(x)dx$.

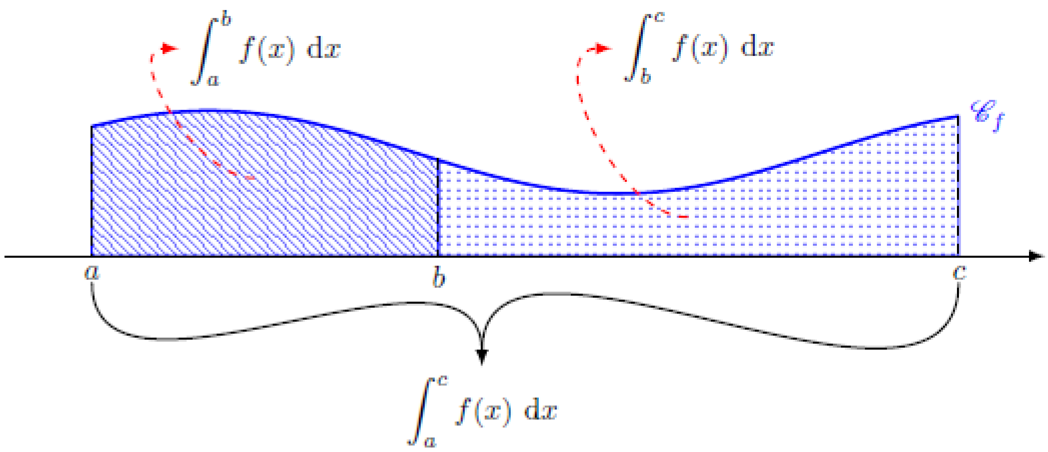


2. Premières propriétés

a) **Relation de Chasles** :

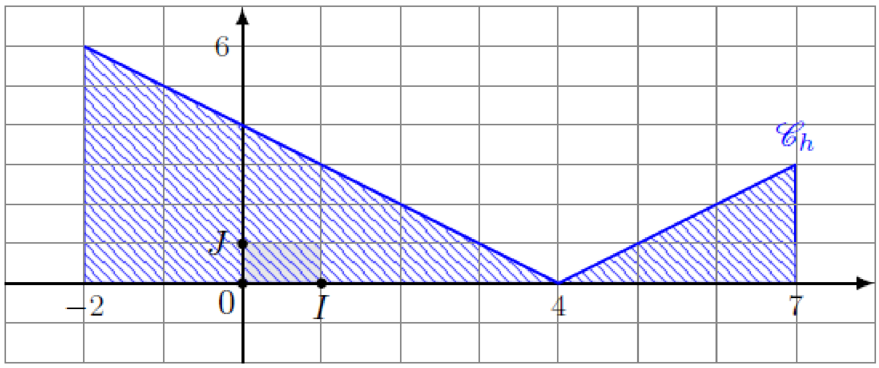
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I. Soient a, b et c dans I, alors :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$



Relation de Chasles dans le cas où f est positive sur $[a;c]$ et $a \leqslant b \leqslant c$.

Exemple : On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 7]$ par la courbe C_h :



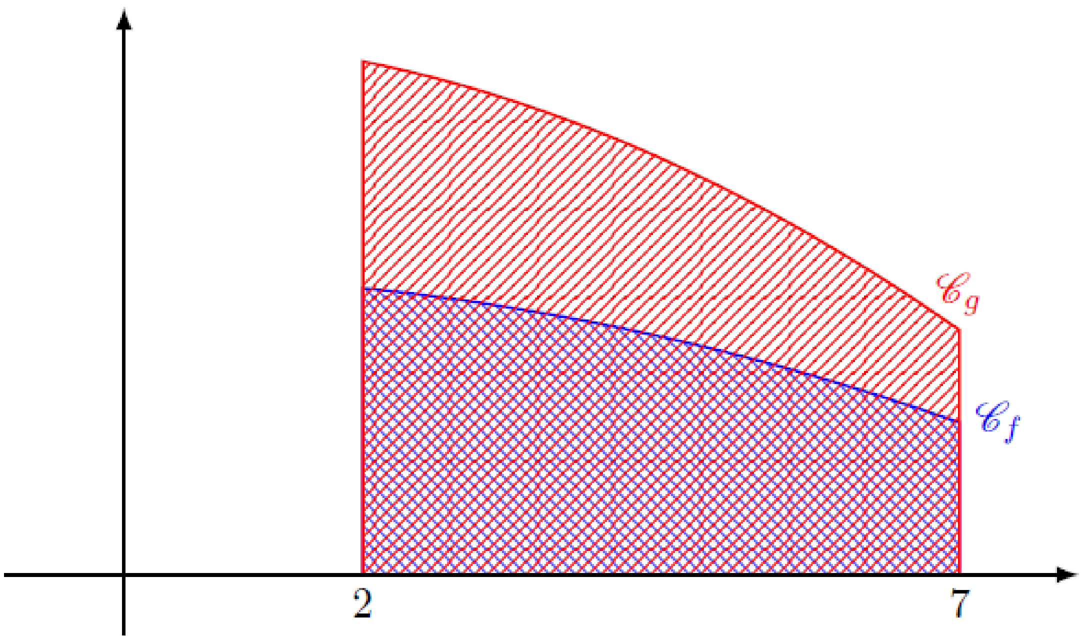
Calculer $A = \displaystyle\int_{-2}^{7} h(t)\ \mathrm{d}t$.

b) **Conservation de l'ordre** :

On considère deux fonctions f et g définies et continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ (avec $a \leqslant b$).

Si pour tout nombre réel $x \in [a\ ;\ b]$, on a : $f(x) \leqslant g(x)$

alors $$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

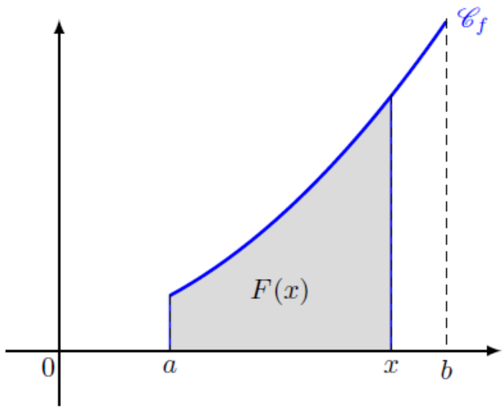


Cas où $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [2\ ;\ 7]$.

On a $\displaystyle\int_2^7 f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_2^7 g(x)\ \mathrm{d}x$.

II. Intégrale et notion de primitive

1. Lien entre intégrale et dérivée



Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b]. La fonction F définie sur [a ; b] par :

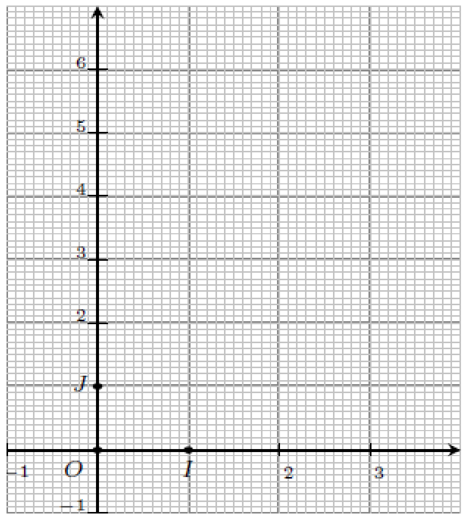
$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur [a ; b] et pour tout x de I :

$F'(x) = f(x)$. De plus, la fonction F est croissante sur [a ; b].

Exemple : Soit f la fonction définie sur [0 ; 3] par $f(t)=2t$.

Tracer le représentation graphique de la fonction f.

Trouver $\int_0^x f(t)dt$ pour $x \in [0\,;3]$.



2. Rappel : Primitives d'une fonction f

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b]. On appelle **primitive de f** sur [a ; b] toute fonction F dérivable sur [a ; b] telle que pour tout réel x de [a ; b] : $F'(x)=f(x)$

Exemples :

a. Soit f la fonction définie sur ℝ par l'expression $f(x)=2x$ et F la fonction définie sur ℝ par l'expression : $F(x)=x^2+7$. La fonction F est **une** primitive de la fonction f sur ℝ.

En effet, pour tout nombre réel x, on a :

b. Trouver une primitive de la fonction f définie sur ℝ par l'expression $f(x)=x^2$.

c. Montrer que la fonction F définie sur ℝ par $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-3$ est une primitive de la fonction f définie $f(x)=x^2+x+1$.

d. Soit f et F deux fonctions définies sur] − 1; +∞[par : $f(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$ et $F(x)=\frac{2x-1}{x+1}$

Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur] − 1;+∞[:

Conséquences :

• Une fonction G définie sur $[a ; b]$ par $G(x) = F(x) + k$, où k est un réel quelconque, est aussi une primitive de f sur $[a ; b]$. On dit qu'une primitive est définie « à une constante près ». F est une primitive de f et toutes les primitives de f sont de la forme : $G(x) = F(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$

• La primitive qui s'annule en a est définie par l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$

• Si F est une primitive de f sur $[a ; b]$ alors il n'existe qu'une seule primitive G prenant la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire : $G(x_0)=y_0$

Exemple : Soit f telle que $f(x)=2x$ sur ℝ. Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 3.

IV. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

1. Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ et F une primitive de f sur $[a ; b]$.

Alors, $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

Remarques :

• Le nombre $F(b) - F(a)$ désigne l'aire de la partie D du plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

• Le nombre $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas de la primitive F choisie.

• On note $\int_a^b f(t)dt = [f(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

• Cette formule peut s'étendre aux fonctions continues de signe quelconque et on a alors la définition suivante : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

L'intégrale de *a* à *b* de *f* est le nombre ……………………….

Remarques :

• Une intégrale n'est donc pas forcément positive : elle ne correspond plus à une aire sous la courbe (sauf dans le cas où la fonction est positive sur l'intervalle).

• On peut alors calculer une intégrale connaissant une primitive de la fonction étudiée.

Exemples :

Calculer les intégrales $I = \int_{-3}^{6} \frac{1}{3}x - 1\,dx$ $\quad J = \int_{-2}^{1} -x^2 + 2x + 1\,dx$ et $K = \int_{-2}^{2} e^{-3x+1}dx$

2. Propriétés calculatoires de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ et k un réel, on a :

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad \int_a^a f(x)dx = 0$$

Exemple :

f est une fonction continue sur l'intervalle [1 ; 3] telle que $\int_1^3 f(x)dx = 2$

En déduire $I = \int_1^3 \left(\frac{3}{2}f(x) - x\right)dx$

3. **Relation de Chasles** :

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I*. Soient *a*, *b* et *c* dans *I*, alors :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

4. **Conservation de l'ordre** :

On considère deux fonctions *f* et *g* définies et continues sur un intervalle [*a* ; *b*] (avec $a \leqslant b$).
Si pour tout nombre réel $x \in [a ; b]$, on a : $f(x) \leqslant g(x)$

alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

5. **Positivité** :

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle [*a* ; *b*]. Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a ; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Exemple : Sans calculer, déterminer le signe des intégrales suivantes :

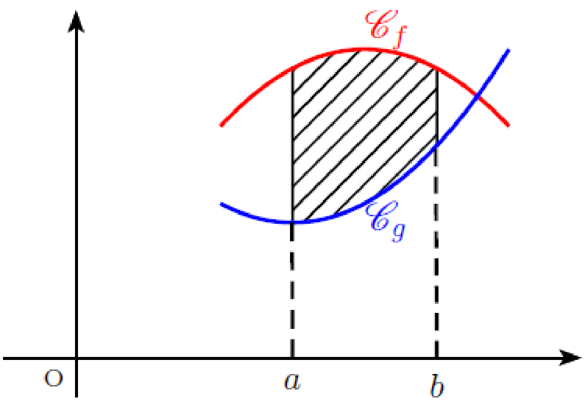
$I = \int_{-2}^{-1} x^2 dx$ $J = \int_1^e \ln x\, dx$ et $K = \int_{-2}^{0} e^x + e^{-x} dx$

V. Applications de l'intégrale

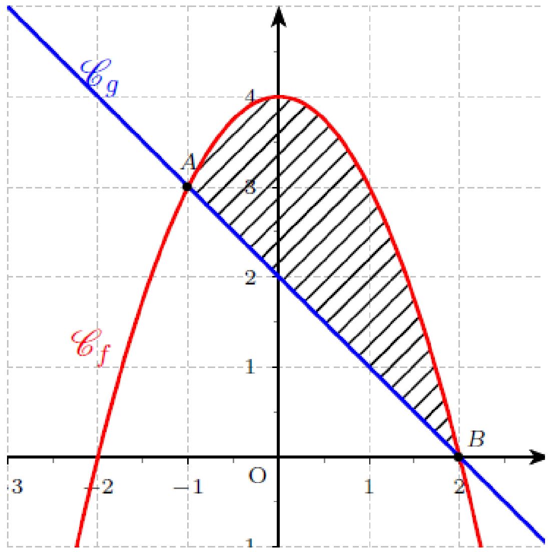
1. Calculs d'aires

Soient *f* et *g* deux fonctions continues et positives sur [*a* ; *b*] telles que $f(x) \leqslant g(x)$. L'aire (en unités d'aire) du domaine compris entre les courbes C_f et C_g
et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$\int_a^b f(x) - g(x)dx$$



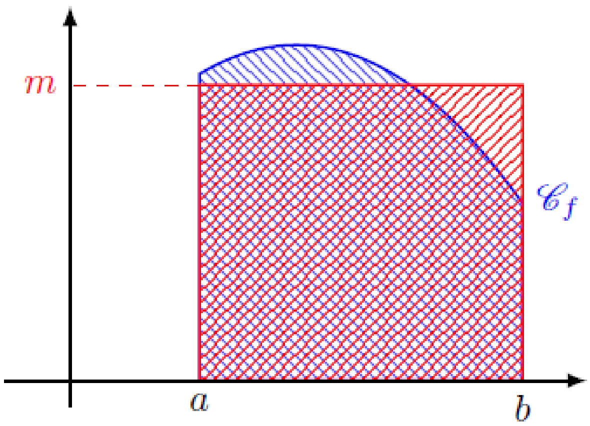
Exemple : Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur ℝ par
$f(x)=4-x^2$ et $g(x)=-x+2$
Les courbes C_f et C_g se coupent aux points d'abscisses -1 et 2 et C_f est au dessus de C_g sur $[-1\,;2]$.
Calculer l'aire du domaine hachuré.



2. Valeur moyenne d'une fonction

On considère une fonction *f* définie et continue sur un intervalle [*a* ; *b*] (avec *a*<*b*).
On appelle **valeur moyenne de *f* entre *a* et *b*** le nombre *m* tel que :

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



Si f est positive sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$
et si m est la valeur moyenne de la fonction f entre a et b, alors $m(b-a)=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
et l'aire du rectangle de largeur $b-a$ et de longueur m est égale
à l'aire de la partie du plan située sous la courbe $\mathscr{C}_f$ et entre les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Autrement dit, Dans le cas où *f* est strictement positive sur [*a* ; *b*], la valeur moyenne de *f* correspond à la hauteur du rectangle de largeur *b* – *a* ayant la même aire que l'aire sous la courbe.

Exemple :
Le bénéfice, en milliers d'euros, d'une production de *q* kg de produit est donné par :
$f(q)=-3q^2+6q-1{,}5$ pour une quantité *q* de produit, variant de 0 à 2 kg.
Calculer la valeur moyenne de ce bénéfice sur [0 ; 2].