Evolution : modèles continus

I – Limite d'une fonction :

1) Définitions : (*Les limites avec* $-\infty$ *se définissent de la même façon que celles en* $+\infty$)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que les valeurs de *f(x)* peuvent devenir aussi grandes que l'on veut pour peu que *x* soit assez grand. Il n'y a pas de « barrière » au dessus de la courbe de f.

Remarques : On pourra aussi écrire $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$
Cette définition n'est vraiment utile qu'à prouver des formules du cours .

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ signifie que les valeurs de *f (x)* peuvent devenir aussi proche de b que l'on veut pour peu que *x* soit assez grand.

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ signifie que les valeurs de *f (x)* peuvent devenir aussi grande que l'on veut pour peu que *x* soit assez proche de a.

d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ signifie que les valeurs de *f (x)* peuvent devenir aussi proche de b que l'on veut pour peu que *x* soit assez proche de a. C'est le cas de toutes les fonctions qui sont continues en *a,* ce que nous avons déjà expliqué dans le premier thème (TVI)

2) Limites des fonctions usuelles aux bornes de leur ensemble de définition :

Ce sont principalement les mêmes exemples que l'on vu sur les suites, en ajoutant la fonction exp. Il est indispensable de connaître les valeurs de ces limites.
Il est facile de les retrouver intuitivement, les représentations graphiques de la calculatrice sont utiles pour les vérifier.

Les fonctions sin et cos n'ont pas de limites en $\pm\infty$.

3) <u>Théorèmes de comparaison et opération sur les limites :</u>

Les résultats vus sur les suites sont généralisables aux fonctions (y compris les formes indéterminées!)

4) <u>Asymptotes</u> : Soit *f* une fonction de courbe représentative C .

- C a pour asymptote la droite $x=a$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x)=\pm\infty$
- C a pour asymptote la droite $y=b$ si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)=b$

Remarque c'est une notion graphique qui est évidente une fois que l'on visualise la courbe.

II – <u>Equation différentielle du premier ordre. Primitive :</u>

1) <u>Introduction</u> :

Nous savons déjà que $(e^x)'=e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut donc considérer que la fonction exponentielle est solution d'une équation où l'inconnue est une fonction et qui peut s'écrire $y'(x)=y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou plus rapidement $y'=y$.

Une telle équation est appelée <u>équation différentielle</u>.

Dans de très nombreux domaines (électricité, mécanique, biologie,...) des phénomènes suivent une loi d'évolution qui peut être traduite par une équation différentielle.

Attention, comme pour toute équation, le fait de poser une équation différentielle n'implique pas qu'elle ait des solutions, et encore moins que l'on sache la résoudre !

Exemples :

a) trouver des solutions des équations $y'=0$ et $y''+y'+3y=6$

b) montrer que $f(x)=x\,e^x$ est solution de l'équation $y'+y=e^x$

2) <u>Primitives</u> :

a) Un exemple important est le cas des équations du type $y'=f$ avec *f* une fonction que l'on connaît, définie sur un intervalle noté I. Cela revient à chercher une fonction dont la dérivée est *f*.

On appelle <u>*primitive de f sur I*</u> toute fonction solution de cette équation différentielle.

b) Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.

c) Soit *f* une fonction définie sur I et *F* une primitive de *f* sur I, alors toutes les primitives de *f* sur I sont de la forme *F(x)+k* avec *k* une constante réelle.

d) Calculs de primitives :

Il « suffit » de lire le tableau de dérivées de la droite vers la gauche.

3) Résoudre l'équation différentielle $y'=ay$ avec *a* un nombre réel fixé.

Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\times e^{ax}$ avec *k* une constante réelle.

Il y a donc une infinité de solution, une pour chaque valeur de *k*.

4) Résoudre l'équation différentielle $y'=ay+b$ avec $a \neq 0$ et *b* des nombres réels fixés.

- L'équation différentielle $y'=ay+b$ admet une unique solution particulière constante α réelle.
- Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k \times e^{ax}+\alpha$ avec *k* une constante réelle et α la solution particulière constante de l'équation.
  Il y a donc une infinité de solution, une pour chaque valeur de *k*.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle (E) : $2y'+3y=6$

5) Condition initiale :

Il s'agit d'une information supplémentaire, donnée sous la forme d'une valeur de la fonction cherchée ou d'un point de la courbe.

Une équation différentielle linéaire du premier ordre admet une solution une vérifiant une condition initiale donnée.

Exemple : précédent passant par le point $A(0;3)$