Evolution : modèles discrets

I - Suites numériques :

1) Une suite numérique est une fonction de ℕ dans ℝ. On note cette suite u : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \to u_n$

Le nombre réel u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).

2) Définir une suite c'est se donner un procédé qui permet d'associer à chaque valeur du nombre entier naturel n, un nombre réel noté u_n. Ce procédé est appelé un mode de génération de la suite.

a) Suite définie par $u_n = f(n)$.

Considérons la fonction f définie sur ℕ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Lorsque x ne prend que des valeurs entières positives f(x) est bien définie.

Ainsi on peut considérer la suite (u_n) dont le terme général est $u_n = f(n)$ c'est à dire $u_n = \frac{n^2}{n+1}$. On obtient $U_0 = 0$, $U_1 = 1/2$, $U_{10} = 100/11$, ...

b) Suite définie de proche en proche (récurrence).

Soit f une fonction numérique et u_0 un nombre réel donné.
On dit que la suite définie par la donnée de u_0 et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ est une suite récurrente.

Exemple :

3) Sens de variation d'une suite.
Soit (u_n) une suite. On dit que :

- (u_n) est croissante lorsque, pour tout nombre entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- (u_n) est décroissante lorsque, pour tout nombre entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Exemples :

a) Donner le sens de variation de la suite (u_n) dont le terme général est $U_n = n^2$.
La fonction $f(x)=x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc la suite (u_n) est

b) Donner le sens de variation de la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=u_n+2 \end{cases}$

Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 2$. Ainsi pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n$, donc la suite (u_n)est

c) On peut parfois aussi chercher $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque l'on a des fractions par exemple.

II - Suites arithmétiques.

1) Soit (U_n) une suite et r un nombre réel. On dit que (u_n) est une suite arithmétique de raison r si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque : De façon équivalente on peut dire qu'une suite (u_n) est arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs quelconques de la suite est constante. Cette différence est égale à la raison r.

2) Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r alors :
Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$

3) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

a) Pour tout nombre entier naturel n, on a : 1 + 2 + 3 + 4 + … + n = $\frac{n(n+1)}{2}$

b) Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2}$$

Remarque :

La formule peut aussi se retenir sous la forme : $\frac{(nombre\ \text{de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$

III – Suites géométriques.

1) Soit (u_n) une suite et q un nombre réel. On dit que (u_n) est une suite géométrique de raison q si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Remarque :

De façon équivalente on peut dire qu'une suite (u_n) est géométrique lorsque le quotient entre deux termes consécutifs quelconques de la suite est constant. Ce quotient est égal à la raison q.

2) Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q alors :

Pour tout entier naturel n, $u_n = q^n \times u_0$.

3) Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

a) Soit q un nombre réel différent de 0 et de 1, alors pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque :

Si q = 1 alors $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = n + 1$

b) Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, non nulle et différente de 1.

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque : La formule peut aussi se retenir sous la forme : $premier\ terme \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

IV – Notion de limite.

1) La suite (u_n) est dite divergente vers $+\infty$ et on note $\lim_{+\infty} u_n = +\infty$ si pour tout A réel, l'intervalle]A ; $+\infty$ [continent tous les termes u_n à partir d'un certain rang N.

Il y a évidement la même définition pour $\lim_{+\infty} u_n = -\infty$ avec un intervalle du type] $-\infty$;A[

2) La suite (u_n) est dite convergente vers l et on note $\lim_{+\infty} u_n = l$ si pour tout intervalle I contenant l tous les termes u_n à partir d'un certain rang N sont dans I (aussi petit soit-il)

3) limites de références :

4) Limites et opérations :

Les opérations sur les limites se font de manière naturelle en respectant les règles habituelles (règle des signes, multiplication par 0,…) comme si les “infinis” étaient des nombres. Seuls 4 cas posent problème, on les appelle les formes indéterminées :

$$\infty-\infty \quad \infty\times 0 \quad \frac{\infty}{\infty} \text{ et } \frac{0}{0}$$

Exemples :

5) Comparaisons :

a) Minoration : Si pour tout $n\geq N, u_n\leq v_n$ et que $\lim\limits_{+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} v_n=+\infty$

b) Majoration : Si pour tout $n\geq N, u_n\leq v_n$ et que $\lim\limits_{+\infty} v_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_n=-\infty$

c) Gendarmes : Si pour tout $n\geq N, u_n\leq v_n\leq w_n$ et que (u_n) et (w_n) ont la même limite l alors $\lim\limits_{+\infty} v_n=l$

d) Cas d'une suite géométrique :

- Si $0<q<1$ alors la suite (q^n) converge vers 0.
- Si $q>1$ alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

Exemples :

V – Suites arithmético-géométriques.

1) On dit que (u_n) est une suite arithmético-géométrique s'il existe *a* et *b* deux nombres réels tels que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = au_n+b$.

Cas particuliers :

2) Propriété :

Si α est l'unique solution de l'équation $x=ax+b$, la suite (v_n) définie par $v_n=u_n-\alpha$ est géométrique de raison *a.*

Exemple d'étude d'une suite arithmético-géométrique :