Temps d'attente

I. Loi géométrique :

1) Rappel :

La loi binomiale de paramètre n et p notée $\mathrm{B}(n;p)$ est la loi de la variable aléatoire X qui mesure le nombre de succès dans la répétition de façon identique et indépendante de n épreuves n'ayant que deux issues avec une probabilité de succès p .

Pour cette variable aléatoire X, on a $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{(n-k)}$

2) On se place dans la même situation (répétition de façon identique et indépendante de n épreuves n'ayant que deux issues avec une probabilité de succès p) mais cette fois ci, nous arrêtons l'expérience à l'apparition du premier succès. Le nombre de répétitions n'est donc pas fixé à l'avance. Si X est la variable aléatoire qui associe le rang du premier succès, elle suit une loi géométrique de paramètre p .

Pour cette variable aléatoire X, on a $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=p\times(1-p)^{(k-1)}$

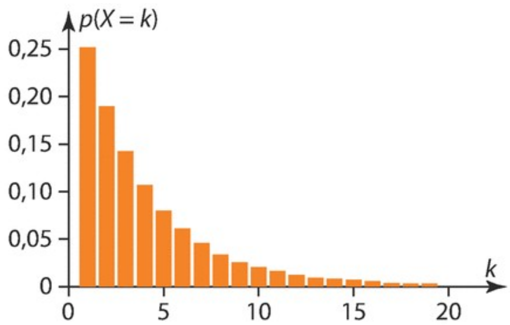
Remarques :

- La formule est évidente quand on remplace dans la formule du 1) *k* par 1 et *n* par *k.*
- Pour ce qui est de la dénomination « géométrique », c'est évidement une référence aux suites géométriques.

Exemple : pour $p=0{,}25$

Propriété **Aspect graphique de la loi géométrique**

Pour *X*, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$, son diagramme en barres associé correspond à une décroissance exponentielle et $p = p(X = 1)$ est la hauteur de la première barre.



3) Propriétés :

a) Si X suit une loi géométrique de paramètres *p*, alors son espérance mathématique vaut $E(X)=\frac{1}{p}$

b) La loi géométrique de paramètre *p* est une loi de probabilité sans mémoire, c'est à dire que la probabilité que le premier succès arrive après la *n-ème* épreuve est la même que la probabilité qu'il arrive après la *(n+m)-ième* sachant que les *m* premiers essais sont des échecs.

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{X}>m)}(\mathrm{X}>m+n)=P(X>n)$$

Par exemple, lorsque l'on lance une pièce équilibrée, la probabilité que pile ne sorte pas pendant les trois premiers lancés est la même que la probabilité que pile ne sorte pas lors des lancés 5,6 et 7 si l'on sait que les 4 premiers ont donnés face.

On appelle également ce phénomène, le non vieillissement (et nous verrons par la suite que la loi exponentielle fonctionne également de la même manière)

II. Loi de probabilité à densité :

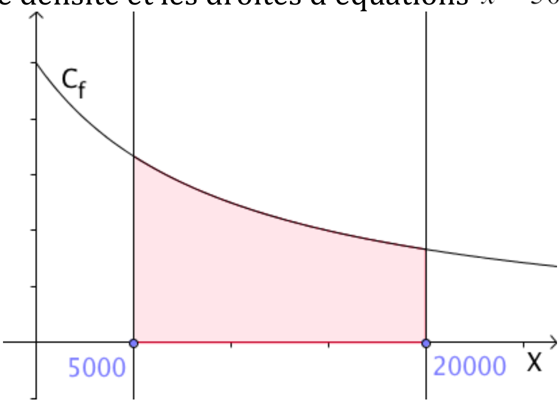
1) Exemple de variable aléatoire continue :

Une entreprise fabrique des disques durs. On définit une variable aléatoire qui, à chaque disque dur, associe sa durée de vie en heures. Cette durée n'est pas nécessairement un nombre entier et peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$. Une telle variable aléatoire est dite continue.

2) Fonction de densité :

Dans le cas d'une variable aléatoire continue qui prend pour valeurs les réels d'un intervalle *I*, sa loi de probabilité n'est pas associée à la probabilité de chacune de ses valeurs (comme dans le cas discret) mais à la probabilité de tout intervalle inclus dans *I*. On a ainsi recours à une fonction définie sur un intervalle *I* de ℝ et appelée fonction de densité.

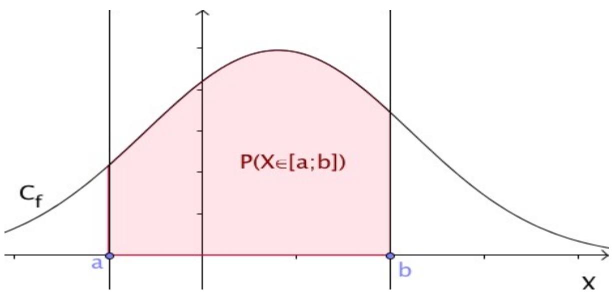
a) Dans l'exemple précédent, on peut par exemple être mené à calculer $P(5000 \leq X \leq 20000)$ correspondant à la probabilité que la durée de vie d'un disque dur soit comprise entre 5000 heures et 20000 heures. Pour cela, on utilise la fonction de densité *f* définissant la loi de probabilité.
La probabilité $P(5000 \leq X \leq 20000)$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction de densité et les droites d'équations $x = 5000$ et $x = 20000$.



Ainsi : $P(5000 \leq X \leq 20000) = \int_{5000}^{20000} f(t)\,dt$.

b) On appelle fonction de densité (ou densité) toute fonction *f* définie, continue et positive sur un intervalle *I* de ℝ telle que l'intégrale de *f* sur *I* soit égale à 1.

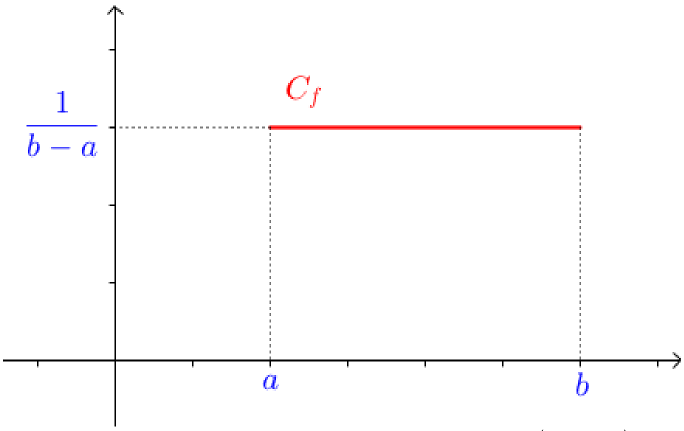
c) Si *X* est une variable aléatoire continue sur $[a;b]$, la probabilité de l'événement $X \in [a,b]$, est égale à l'aire sous la courbe *f* sur $[a,b]$, soit : $P(x \in [a,b]) = \int_a^b f(t)\,dt$.



Remarques :
- Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, la somme des probabilités des événements $\{X = x_i\}$ est égale à 1.
- Dans le cas de variables aléatoires continues, $P(X \leq a) = P(X < a)$ car $P(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$.

II. Loi uniforme :

1) Soit a et b deux réels tels que $a<b$. La loi uniforme sur $[a;b]$, notée $U([a;b])$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction constante f définie sur $[a;b]$ par : $f(x)=\frac{1}{b-a}$



2) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme $U([a;b])$.

Alors, pour tout x de $[a;b]$, on a : $P(a\leqslant X\leqslant x)=\frac{x-a}{b-a}$.

3) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme $U([a;b])$. Alors : $E(X)=\frac{a+b}{2}$.

4) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme $U([a;b])$. Alors : $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$ et $\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Exemple :

Sur une autoroute, deux postes consécutifs de téléphone de secours A et B sont distants de 5km. On note X la variable aléatoire qui, à tout véhicule tombant en panne entre A et B, associe la distance en km parcourue depuis le poste A.
On suppose que la probabilité de tomber en panne entre A et B est indépendante de la position du véhicule au moment de la panne.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Donner sa fonction de densité.

   X suit une loi uniforme sur [0;5]. Sa fonction de densité est $f(x)=\frac{1}{5}$ sur [0;5]

2. Quelle est la probabilité d'être en panne à plus d'un km d'une des deux bornes ?

   $P(1<X<4)=\frac{4-1}{5-0}=\frac{3}{5}$

3. Quels sont l'espérance et l'écart type de X ?

   $E(X)=\frac{5}{2}=2{,}5$ en moyenne, sur un grand nombre de pannes, elles auront lieu à 2,5km de A.

   $$\sigma(X)=\sqrt{\frac{25}{12}}\approx 1{,}44$$

III – Loi exponentielle:

1) La loi exponentielle de paramètre λ (λ>0) est la loi à densité dont la fonction de densité est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$.

Elle intervient dans les cas d'un taux d'avarie constant, généralement appelé « durée de vie sans vieillissement », qui concerne certains composants électroniques.

Exemple : Dans le cas particulier où λ=0,02 (dérivée, tableau de variation, courbe et aire sous la courbe)

$f(t) = 0{,}02\, e^{-0{,}02t}$

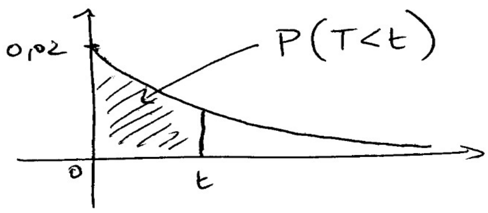
$f'(t) = 0{,}02 \times (-0{,}02)\, e^{-0{,}02t}$

$= -0{,}0004\, e^{-0{,}02t} < 0$ car $e^{-0{,}02t} > 0$.

t	0		$+\infty$
f'		$-$	
f	$0{,}02$	$\searrow$	0

$f(0) = 0{,}02 \times 1 = 0{,}02$

$\lim\limits_{+\infty} f = 0$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}02t} = 0$



2) Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tout $x \geq 0$, on a $P(X \leq t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1-e^{-\lambda t}$ et $P(X>t)=1-(1-e^{-\lambda t})=e^{-\lambda t}$

Exemple : Toujours dans le cas λ=0,02, calculer $P(X \leq 100)$ et $P(20 \leq X \leq 50)$.

3) L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle est

$$E(X)=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t xf(x)\,dx=\frac{1}{\lambda}$$

Cela veut dire que si l'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ, la moyenne des valeurs prises par X devient voisine de $\frac{1}{\lambda}$.

4) La variance d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle est

$$V(X)=\lim_{t^2\to+\infty}\int_0^t xf(x)\,dx=\frac{1}{\lambda^2}$$ Son écart-type est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{1}{\lambda}$.

5) La loi exponentielle de paramètre λ est une loi de probabilité sans mémoire, c'est à dire que

$$P_{(X>t)}(X>t+h)=P(X>h)$$

Par exemple, si un appareil fonctionne déjà depuis 3 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore deux ans est la même que la probabilité qu'il fonctionne deux ans au moment où on l'a acheté. C'est pour cela que l'on parle de durée de vie sans vieillissement