Les modèles démographiques

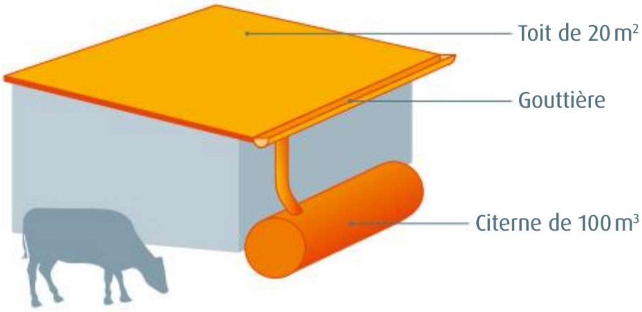
Séance 2 : Le modèle linéaire

Peut-on décrire l'évolution dans le temps des effectifs d'une population d'individus avec le modèle linéaire ?

Un exemple de modèle linéaire : La récupération des eaux de pluie

1. Énoncé du problème

Un jardinier souhaite remplir une citerne de 100 m^3 à l'aide d'eau de pluie. La citerne contient déjà 13 m^3 d'eau. Pour la remplir entièrement, il récupérera de l'eau de pluie sur un toit de 20 m^2. Dans la région où il habite, il tombe en moyenne 600 L (0,6 m^3) de pluie par mètre carré et par an. Combien de temps faudra-t-il au jardinier pour remplir sa citerne s'il n'en vide jamais l'eau?



2. Du langage courant au langage mathématique

Traduction des données

Langage courant	Langage mathématique
Nombre d'années écoulées	Variable n ($n \in \mathbb{N}$)
Quantité d'eau initiale dans la citerne	Constante $u(0)$ (en m^3)
Quantité d'eau dans la citerne après n années	Variable $u(n)$
Quantité d'eau qui est récupérée chaque année dans la citerne	Constante r (en m^3)

Traduction du problème

L'année 1, la quantité d'eau contenue dans la citerne peut s'écrire:

$$u(1) = u(0) + r$$

Plaçons-nous l'année n. La quantité d'eau contenue dans la citerne peut s'écrire:

$$u(n) = u(n-1) + r$$

Plaçons-nous l'année $n+1$. La quantité d'eau contenue dans la citerne peut s'écrire:

$$u(n+1) = u(n) + r$$

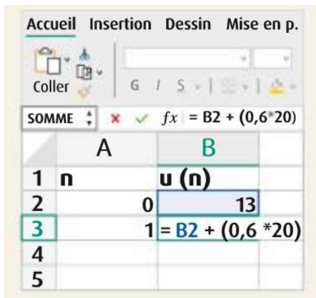
On a donc: $u(n+1) - u(n) = r$. La différence entre le volume d'eau dans la citerne deux années consécutives est constante et vaut r.

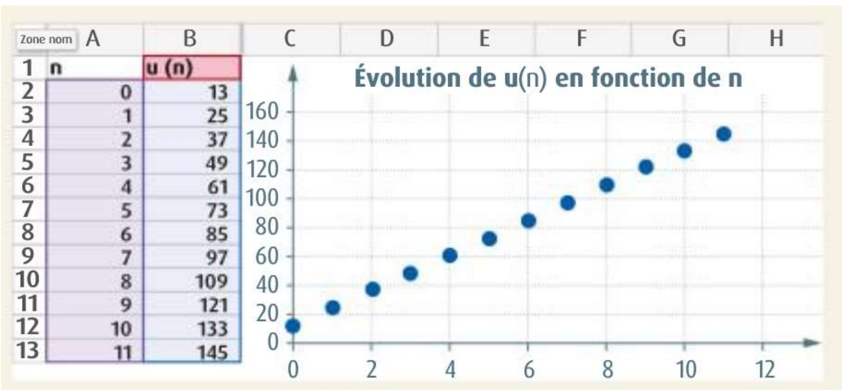
En n années, le volume d'eau supplémentaire tombé dans la citerne est donc égal à $n \times r$. On peut donc écrire: $u(n) = u(0) + (n \times r)$

En langage mathématique, le problème peut donc s'écrire ainsi:

On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que: $u(0) + (n \times r) \geqslant 100$

1. Avec les données de l'énoncé, préciser la valeur de $u(0)$, déterminer r et en déduire $u(1)$.
2. Avec la formule permettant de calculer $u(n)$ pour n'importe quelle année n, connaissant $u(0)$ et r, calculer $u(6)$.
3. Résoudre l'inéquation permettant de répondre au problème posé puis rédiger une conclusion.
4. A l'aide du tableur, vérifions le résultat précédent.
Le nombre d'années étant reporté dans la colonne A et le volume dans la citerne dans la colonne B, remplir les cellules A1, A2, A3, B1, B2 et B3 comme indiqué dans la fenêtre ci-contre. A l'aide de la fonction « itération » du tableur, obtenir la valeur des autres cellules et illustrer les par un graphique comme ci-dessous.
(Appeler le professeur pour valider votre graphique)





	A	B
1	n	u (n)
2	0	13
3	1	25
4	2	37
5	3	49
6	4	61
7	5	73
8	6	85
9	7	97
10	8	109
11	9	121
12	10	133
13	11	145

POINT « COURS » :

Suite arithmétique

Lorsque la variation absolue $u(n+1) - u(n)$ de la grandeur u entre deux paliers n et $n+1$ est constante, on dit que la croissance (ou décroissance) est linéaire.

Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{u(n+1) = u(n) + r}$, où r est une constante.

La suite u de nombres $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, etc. est une **suite arithmétique** (**Fig. 1**).

Le nombre r est appelé la raison de la suite u.

Pour tout entier naturel n, $\boxed{u(n) = u(0) + n \times r}$

Dans un repère, les points de coordonnées (n ; $u(n)$) sont alignés. Ils sont sur la droite d'équation $y = u(0) + r \times x$.

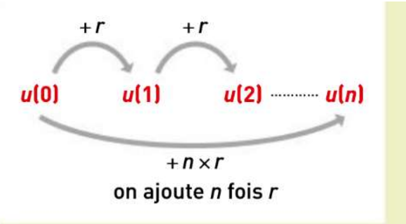


Fig. 1 : Principe d'une suite arithmétique.

Un autre exemple de modèle linéaire : La population des Hauts-de-France

Le nombre d'habitants de la population des Hauts-de-France a augmenté d'environ 9420 par an de 1990 à 1999.

En 1990, il était de 5 770 671 habitants.

1. En prenant comme année $n = 0$ l'année 1990, écrire le terme général $u(n)$ de la suite arithmétique décrivant la population des Hauts-de-France, en précisant son 1^{er} terme et sa raison. (On suppose que l'augmentation reste constante).
2. Calculer alors la population de cette région en 1999.
3. En réalité, en 2008, sa population était de 5 931 091. Calculer l'estimation en 2008 et la comparer avec le nombre réel. Conclure sur la fiabilité de ce modèle sur le long terme.

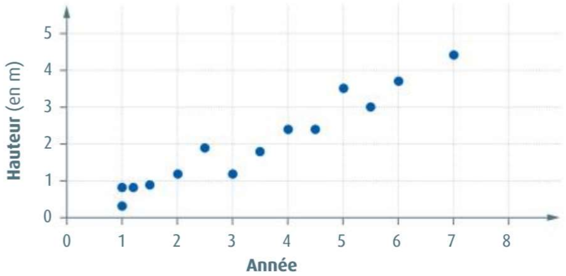
Place du Général-de-Gaulle, Lille.

Un exemple d'ajustement linéaire : Que faire quand la variation absolue est presque constante ?

1. Énoncé du problème

Un garde forestier a mesuré la hauteur de plusieurs arbres dont il connaissait l'âge. Il a ainsi obtenu une représentation sous forme de nuage de points de la hauteur des chênes en fonction des années. Il cherche à savoir si une fonction mathématique simple pourrait lui permettre de prédire la hauteur d'un chêne lorsqu'il aura l'âge de 20 ans.

Temps (en années)	0,9	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0
Hauteur (en m)	0,3	0,8	0,8	0,9	1,2	1,9	1,2
Temps (en années)	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	7,0
Hauteur (en m)	1,8	1,3	1,2	3,5	3	3,8	4,3



2. Du langage courant au langage mathématique

À partir de données issues de l'observation d'un phénomène, on cherche à expliquer une variable y, dans notre exemple la hauteur du chêne, à l'aide d'une variable x, dans notre exemple le temps écoulé depuis la germination. On représente graphiquement le nuage des points de coordonnées (x, y). Ce nuage forme approximativement une droite. Dans ce cas, un **modèle linéaire** permet de fournir une valeur approchée de la variable y. Dans ce modèle, y est une **fonction affine** f de la variable x :

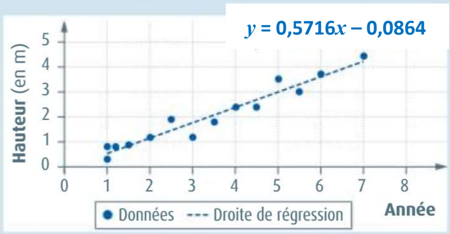
$$y = f(x) = ax + b$$

a et b étant des constantes ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$).

La courbe représentant y en fonction de x peut donc être approchée par une **droite d'équation $y = ax + b$**.

Formulé autrement, pour une suite u dont la variation est presque constante d'un rang à l'autre, le modèle linéaire permet d'obtenir une approximation de la valeur $u(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le tableur propose une **courbe de tendance** permettant de décrire au plus près les données réelles. Dans notre problème, la courbe de tendance est donc une droite dite **droite de régression**.



1. A l’aide d’un tableur, représenter le nuage de points et faire apparaître la droite de régression ainsi que son équation. (Appeler le professeur pour valider votre graphique).

2. Recopier l’équation de la droite de régression en ayant arrondi les constantes a et b à 10^{-2}.

3. Utiliser cette équation pour déterminer la taille théorique d’un chêne âgé de 20 ans.

POINT « COURS » :

Ajustement par une suite arithmétique

Dans la réalité, la variation absolue n’est pas tout à fait constante et les points ne sont pas tout à fait alignés. Pour établir un modèle, on peut estimer la variation absolue du modèle lorsque c’est possible, ou bien utiliser la calculatrice ou un tableur pour obtenir une équation de la droite qui ajuste le nuage de points.

Exemple : On peut considérer que, depuis 2015, la production définie par la figure 2 augmente de 100 tonnes par an.
Ainsi, $u(n+1) = u(n) + 100$ et $u(n) = 12\,000 + 100n$. On peut prévoir que la production en 2021 sera de 12 600 tonnes car $u(6) = 12\,600$. Grâce à un tableur ou une calculatrice, on peut déterminer une équation de la droite qui ajuste le nuage de points (Fig. 3).

Année	Rang n	Production (tonnes)	Variation absolue
2015	0	12 000	
2016	1	12 101	101
2017	2	12 201	100
2018	3	12 300	99
2019	4	12 400	100

Fig. 2 : Production croissant de manière linéaire.

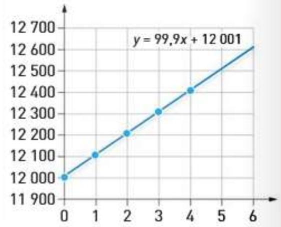


Fig. 3 : Ajustement d’un nuage de points par une droite

Un autre exemple d’ajustement linéaire : La population de la région Sud

Dans la région Sud, la population recensée par l’Insee est donnée dans le tableau ci-dessous :

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Population	4 502 385	4 538 012	4 578 658	4 623 181	4 668 983	4 713 095	4 750 947	4 815 232	4 864 015

1. A l’aide d’un tableur, représenter ces données dans un repère, avec le rang en abscisse et le nombre d’habitants en ordonnée. (Appeler le professeur pour valider votre graphique).

2. Trouver l'équation de la droite de régression modélisant l'évolution de cette population.

3. Grâce à cette équation de droite, estimer la population de la région Sud en 2016. Comparer avec la population réelle qui était alors de 5 021 928 habitants. Conclure sur la fiabilité de ce modèle sur le long terme.