Les modèles démographiques

Séance 3 : Le modèle exponentielle

Quel modèle mathématique pourrait permettre de décrire de façon approchée cette évolution des effectifs ?

Un exemple de modèle exponentielle :

Le Honduras est un pays d'Amérique centrale. Sa population était de 9 587 522 habitants en 2018.

Dans le tableau ci-dessous, on donne les chiffres entre 1975 et 1983. Pour décrire l'évolution de la population sur cette période, on a calculé la variation absolue du nombre d'habitants entre deux années consécutives, ainsi que le taux de variation.

Par exemple, entre 1975 et 1976, la population a augmenté de :

3 251 145 – 3 153 253 = 97 892 habitants.

Le taux de variation est égal à :

$$\frac{3\,251\,145 - 3\,153\,253}{3\,153\,253} = \frac{97\,892}{3\,153\,253} \approx 0{,}031,$$

soit environ 3,1 %.

On s'aperçoit que, sur la période étudiée, la variation absolue augmente, alors que le taux de variation est toujours très proche de 3,1 %.

Lorsque le taux de variation de la population entre deux années consécutives est constant, on dit que la **croissance** est **exponentielle**.

Année	Population	Variation absolue	Taux d'évolution
1975	3 153 253		
1976	3 251 145	97 892	3,1 %
1977	3 352 825	101 680	
1978	3 458 095	105 270	
1979	3 566 654	108 559	
1980	3 678 279	111 625	
1981	3 792 919	114 640	
1982	3 910 640	117 721	
1983	4 031 325	120 685	

Évolution de la population du Honduras (*données de la Banque mondiale*).

Formule

Pour un taux d'accroissement t, la population suit une suite géométrique de raison $q = 1 + t$.

1. Compléter la dernière colonne du tableau, les pourcentages seront arrondis à 10^{-1} près. Que constate-t-on ?
2. Le taux de variation étant constant, on définit une suite u (dite géométrique) donnant la population hondurienne au bout de n années, en prenant l'année 1975 pour le rang 0, donc $u(0) = 3\,153\,253$.
   Avec les données de l'énoncé, préciser la valeur de $u(1)$ puis, grâce à l'encadré ci-dessus, la raison q de cette suite.
3. Donner une formule liant $u(1)$, $u(0)$ et q puis une formule liant $u(n + 1)$, $u(n)$ et q et enfin une formule liant $u(n)$, $u(0)$ et q.
4. Déterminer, avec ce modèle, le nombre d'années nécessaires au doublement de la population de 1975.
   On pourra éventuellement utiliser un tableur pour établir le résultat. (Dans ce cas, appeler le professeur pour vérifier la feuille de calcul établie)
5. Calculer l'estimation en 2018 et la comparer avec le nombre réel. Conclure sur la fiabilité de ce modèle sur le long terme.

POINT « COURS » :

Suite géométrique

Lorsque le taux de variation t de la grandeur u est une constante, on dit que la croissance (ou décroissance) est exponentielle.

Pour tout entier naturel n, $u(n+1) = (1 + t) \times u(n)$. On pose : $q = 1 + t$. On a alors, pour tout entier naturel n, $\mathbf{u(n+1) = q \times u(n)}$.

Pour tout entier naturel n, $\boxed{u(n) = u(0) \times q^n}$

La suite u de nombres $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, etc. est une **suite géométrique** (**Fig. 4**).

Le nombre q est appelé la raison de la suite u.

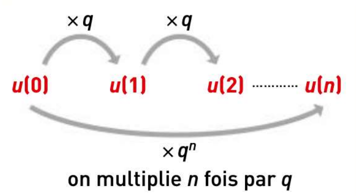


Fig. 4 : Principe d'une suite géométrique.

Un autre exemple de modèle exponentiel :

DOC 1 Un mélibée (*Coenonympha hero*). Le mélibée est un papillon protégé et classé comme « vulnérable » en France métropolitaine. On cherche à prédire l'évolution d'une population pendant 15 ans après réintroduction de 50 mâles et 50 femelles dans un milieu où le papillon a disparu.

Données

- 50 œufs pondus chaque année par femelle s'étant accouplée
- Taux d'éclosion des œufs : 30 %
- Taux de survie des chenilles jusqu'à l'âge de reproduction : 26 %
- Probabilité d'accouplement d'une femelle : 70 %
- 50 % de femelles dans la population.
- Tous les adultes meurent peu après l'accouplement.
- Aucun facteur ne limite la croissance de la population et il n'y a pas de migrations.

Traduction mathématique du problème et résolution

- Soit $N(n)$ l'effectif des papillons dans la population l'année n.
Il y a donc $\frac{N(n)}{2}$ femelles. Donc $\frac{N(n)}{2} \times 0{,}7$ femelles s'accouplent chaque année et pondent chacune 50 œufs.
- Nombre d'œufs arrivant à éclosion chaque année pour chaque femelle :
$$50 \times 0{,}3 = 15 \text{ œufs.}$$
- Nombre d'œufs donnant chaque année des chenilles arrivant jusqu'à l'âge de la reproduction :
$$15 \times 0{,}26 = 4 \text{ œufs.}$$
- L'effectif $N(n+1)$ de la population l'année $n+1$ est donc :
$$N(n+1) = \frac{N(n)}{2} \times 0{,}7 \times 4 = 1{,}4 \times N(n)$$

$\Rightarrow$ Cette population a donc un **taux de variation constant**

DOC 2 Estimation du taux de variation démographique du mélibée.

1. Expliquer chaque étape du raisonnement en le rapprochant de la donnée de l'énoncé correspondante.
Ex : $\frac{N(n)}{2}$ vient de « 50% de femelles dans la population »
2. On introduit 100 mélibées dans un milieu. Justifier que les effectifs peuvent être décrits par une suite géométrique dont on précisera le 1er terme et la raison.
3. Connaissant la raison, en déduire la valeur du taux de variation.
4. Déterminer le temps de doublement de la population (éventuellement à l'aide d'un tableur). Quelles critiques pouvez-vous faire à ce modèle ?

Différents exemples d'ajustement exponentiel : Que faire quand le taux de variation est presque constant ?

Formule

Pour calculer le taux moyen t par rapport au taux global T pour n variations successives : $1+t=(1+T)^{\frac{1}{n}}$.

Modéliser avec une suite géométrique

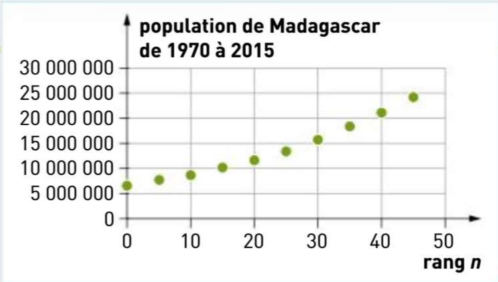
Année	Palier n	Population (millions)	Taux de variation	$u(n)$
2004	0	18,76		18,76
2005	1	19,43	0,036	19,45
2006	2	20,15	0,037	20,17
2007	3	20,91	0,038	20,92
2008	4	21,7	0,038	21,69
2009	5	22,51	0,037	22,50
2010	6	23,36	0,038	23,33
2011	7	24,22	0,037	24,19

a Évolution de la population de l'Angola.

Sur la période étudiée, on a calculé le taux de variation de la population de l'Angola d'une année à la suivante (**a**). Ce taux est toujours proche de 0,037, soit 3,7 %.

On peut choisir comme modèle la suite géométrique u de raison 1,037 et telle que $u(0) = 18{,}76$. Ainsi : $u(n+1) = 1{,}037 \times u(n)$ et $u(n) = 18{,}76 \times 1{,}037^n$.

On observe que les valeurs de $u(n)$ sont très proches de la population réelle.



b

En 1970, il y avait 6 576 305 habitants à Madagascar, et il y en avait 24 234 088 en 2015. Le nuage de points représentant l'évolution de la population permet de conjecturer qu'il s'agit d'une croissance exponentielle (**b**). On note v la suite géométrique qui va modéliser cette population. On doit déterminer la raison q de cette suite.

On a : $v(0) = 6\,576\,305$ et $v(45) = 24\,234\,088$.

Comme $v(45) = v(0) \times q^{45}$, on obtient : $q^{45} \approx 3{,}685$.

Donc $q \approx 3{,}685^{\frac{1}{45}}$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve : $q \approx 1{,}0294$ et on en déduit que selon ce modèle, l'augmentation de la population entre deux années consécutives est d'environ 2,94 %.

??? On découvre, dans ce document, deux façons différentes d'établir une modélisation de l'évolution de la population par une suite géométrique, la raison s'obtenant soit par une valeur approchée du taux de variation annuelle soit par la valeur du taux moyen. Avec ces modèles, estimer la population en 2030 de l'Angola et de Madagascar, ainsi que le temps de doublement de la population.

POINT « COURS » :

Ajustement par une suite géométrique

Dans la réalité, le taux de variation n'est pas tout à fait constant. Pour établir un modèle, on peut estimer le taux de variation du modèle ou bien calculer le taux de variation entre deux dates successives en utilisant la propriété :

Soit q et a deux réels positifs : $\boxed{q^n = a \text{ équivaut à } q = a^{\frac{1}{n}}}$

Exemple : On peut considérer que la population définie par la **figure 5** augmente de 20 % par an. Elle est chaque année multipliée par 1,2.
Ainsi, $u(n+1) = 1{,}2 \times u(n)$ et $u(n) = 500 \times 1{,}2^n$.

Temps de doublement

À l'aide d'un tableur, d'une calculatrice ou d'une représentation graphique, on peut déterminer le temps de doublement de la population. Ce temps de doublement ne dépend pas de la population initiale.

Exemple : Dans le cas où la population d'un pays augmente chaque année de 20 %, on détermine le plus petit entier naturel n tel que $1{,}2^n \geqslant 2$.

Année	Palier n	Population	Taux de variation
2015	0	500	
2016	1	602	0,204
2017	2	728	0,209
2018	3	872	0,198
2019	4	1 048	0,202

Fig. 5 : Population croissant de manière exponentielle.

Un autre exemple d'ajustement exponentiel :

Voici les données de production de riz aux Etats-Unis, en quintal d'Amérique du Nord, d'après le site gouvernemental USDA
(1 quintal américain, cwt = 45,359 236 96 kg).

1. Vérifier que le taux d'accroissement moyen annuel entre 2006 et 2018 vaut environ 1,188 %. Soit q = 1,011 88.

2. Écrire le terme général de la suite géométrique u de premier terme : $u(0) = 194\ 585$ et de raison q.

3. Comparer $u(5)$ et la production en 2006 + 5 = 2011. Faire de même pour l'année 2016 et le terme correspondant de u.

4. La croissance exponentielle peut-elle servir de modèle dans ce cas ? Justifier en s'aidant de la question 3.

Année	Production (cwt)
2006	194 585
2007	198 388
2008	203 733
2009	219 850
2010	243 104
2011	184 941
2012	199 939
2013	189 500
2014	222 215
2015	193 080
2016	224 145
2017	178 228
2018	224 211