Première spécialité/Concours olympiades

Plus de 40 exercices réservés aux professeurs : utilisez-votre identifiant pour y accéder

1. Appréhender une nouvelle définition :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 1

Un entier naturel non nul est un nombre Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n=24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2+4=6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre de Harshad.

   b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad?

2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

   b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

2. Arithmétique :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 2

1. a. En partant de 12 589 et en comptant de 29 en 29, peut-on atteindre le nombre 12 705?

   b. En partant de 1 485 et en comptant de 29 en 29, peut-on atteindre le nombre 310 190?
   Expliquer votre démarche.

2. Quel est le plus petit entier positif à partir duquel, en comptant de 29 en 29, on peut atteindre 2013?

3. Existe-t-il des entiers positifs inférieurs à 2 013 à partir desquels il est possible d'atteindre ce nombre aussi bien en comptant de 29 en 29 qu'en comptant de 31 en 31?
   Si oui, les trouver tous.

3. Equations et algèbre :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 3

Calculer la somme suivante sans utiliser la calculatrice :

$$\begin{aligned}&\left(1^2-2^2-3^2+4^2\right)+\left(5^2-6^2-7^2+8^2\right)\\&\qquad+\left(9^2-10^2-11^2+12^2\right)\\&\qquad+\cdots+\left(2009^2-2010^2-2011^2+2012^2\right)\end{aligned}$$

4. Géométrie :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 4

A et B sont deux points d'un cercle de centre O et de rayon 5 tels que $AB=6$.

Le carré $PQRS$ est inscrit dans le secteur angulaire OAB de sorte que :

- P est sur le rayon $[OA]$;
- S est sur le rayon $[OB]$;
- Q et R sont deux points de l'arc de cercle reliant A et B.

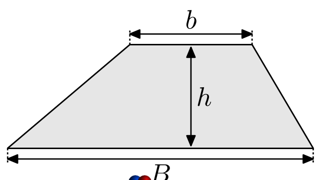
1. Faire une figure correspondant à la situation proposée.
2. Calculer l'aire du carré $PQRS$.

5. Géométrie et algèbre :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 5

Rappel : Aire d'un trapèze
$$A=\frac{(B+b)\times h}{2}$$

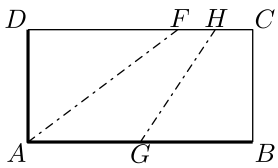


ChingMath

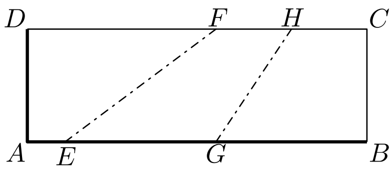
Une pizza rectangulaire $ABCD$ comporte de la croûte sur deux côtés consécutifs, $[DA]$ et $[AB]$. **On cherche comment partager la pizza en trois morceaux équitables** : chaque part doit avoir la même longueur de croûte et la même aire.

Dans chaque situation, on fixe la longueur du petit côté $AD=1$.

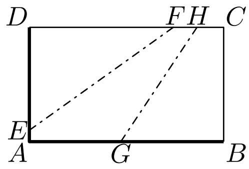
1. Dans le cas particulier ci-contre, on suppose que le partage réalisé est équitable.
   Quelle est la longueur AB?
   Déterminer les longueurs :
   DF, FH et HC.



2. On généralise la situation en posant $AB=L$ *(et en supposant toujours que $AD=1$)*.
   Déterminer, pour chaque situation ci-dessous, les longueurs utiles permettant de découper équitablement la pizza.



situation 1 : $L>2$



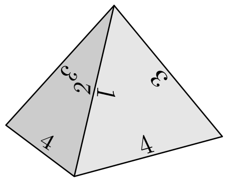
situation 2 : $L<2$

6. Probabilité :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 6

Un dé tétraèdrique comporte quatre faces comme le dé représenté ci-contre. Lorsqu'on jette un tel dé, le résultat est le nombre inscrit au plus près de la base tétraèdre. Dans notre exemple, le dé tétraédrique est tombé sur la face 4.



Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jouent avec quatre dés tétraédriques réguliers et équilibrés mais qui ne sont pas numérotés de façon habituelle. Ainsi, le dé d'Antoine compte quatre faces numérotées 1, 6, 6 et 6. Avec ce dé, le nombre 1 est obtenu avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et le nombre 6 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

- Le dé de Baptiste est numéroté 4, 4, 5 et 5 ;
- celui de Cyril 3, 3, 3 et 8 ;
- et enfin, celui de dianne 2, 2, 7 et 7.

1. Chaque joueur jette ce dé tétraédrique une fois. Qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6?
2. Les joueurs commencent une série de duels : Antoine joue contre Baptiste, Baptiste joue contre Cyril, Cyril joue contre Diane, Diane joue contre Antoine. Le gagnant de chaque duel est le joueur qui a obtenu le résultat le plus élevé.
   a. Montrer que dans le premier duel Antoine gagne contre Baptiste avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.
   b. Donner les probabilités de gain des joueurs dans les trois autres duels.
3. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jettent simultanément leur dé. Celui des quatre joueurs qui obtient le plus grand nombre gagne.
   a. Montrer que la probabilité que Baptiste gagne est égale à $\frac{3}{32}$.
   b. Qui a le plus de chances de gagner ce jeu?

7. Annales toutes séries :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 7

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 3.

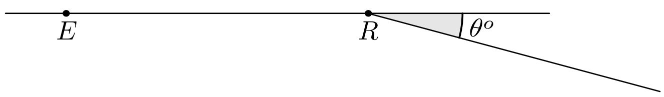
1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.
2. a. Donner tous les diviseurs à un chiffre du nombre 1000.
   b. En déduire un nombre *digisible* à quatre chiffres.
3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
   a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
   b. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
   c. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
   d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

8. Annales série S :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 8

Pierre et sa fille Eloïse se promènent sur une route horizontale. En un point R, cette route descend faisant un angle θ de 5^o avec l'horizontal *(voir figure)*

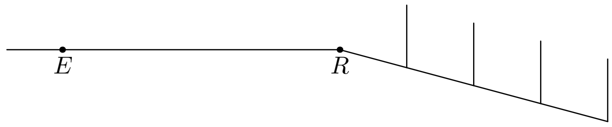


Eloïse, dont les yeux sont à 1,6 mètre du sol, s'arrête en un point E, à 24 mètres du point R.

Son père continuant à marcher, passe devant le point R puis s'engage dans la partie en pente de la route.

1. Quand il se trouve à 86 mètres de R, il disparaît des yeux de sa fille.
   Déterminer la hauteur de Pierre.

2. Dans la partie en pente de la route, des poteaux d'une hauteur de 6,5 mètres sont plantés verticalement tous les 28 mètres, comme sur le schéma ci-dessous

   Le pied du premier poteau se situe à 28 mètres du point R.
   On admet l'hypothèse que les poteaux ne peuvent se masquer les uns des autres.

   Combien Eloïse peut-elle voir de poteaux de l'endroit où elle se trouve?

3. Quelle est, en réalité, la mesure de l'angle θ, sachant qu'Eloïse ne voit que 5 poteaux?
   On pourra utiliser la formule : $1+\left(\tan\theta\right)^2=\dfrac{1}{\left(\cos\theta\right)^2}$

   On donnera une valeur approchée de θ à 10^{-3} près.

9. Annales séries autres que S :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 9

Les sextuplés de M et Mme Logic sont dans la même classe de 2^{nde}.
A la fin de la journée au cours de laquelle ils ont eu un contrôle de mathématiques, ils rentrent chez eux et présentent à leurs parents les réponses qu'ils ont fournies aux diverses questions

	Alix	Béa	Carol	Delphine	Emile	Félix
Question 1	150	700	150	100	700	150
Question 2	103	101	101	101	103	35
Question 3	101	732	107	101	101	107
Question 4	34	125	216	28	34	34
Question 5	216	216	27	55	25	103

"Papa, peux-tu nous dire combien nous avons chacun?"

- Je veux bien, mais vous ne m'avez pas donné les questions!
- On ne les a pas, on a dû rendre le sujet avec les réponses.
- Moi, je me rapelle qu'il fallait trouver le plus petit entier premier après 100, dit Béa.
- Il fallait aussi calculer le volume d'un cube dont le côté était un entier, je ne me rappelle plus lequel, rajoute Félix.
- On demandait aussi l'âge du capitaine de je ne sais quel bateau se souvient Carol.
- C'est tout ce que vous vous rappelez, demande le père?
- Oui, mais en regardant rapidement les copies, le professeur nous a dit que l'un d'entre nous avait tout juste. . . et un autre tout faux!

Au bout d'un moment, leur père leur annonce qu'il connait leurs notes.

Quelles sont ces notes *(chaque réponse juste rapporte 4 points)* et quel est l'âge du capitaine? Détailler le raisonnement ayant conduit au résultat.

> Un entier premier est un entier strictement positif admettant exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
> Les premiers entiers premiers sont :
> 2 ; 3 ; 5 ; 7. . .

11. Exercices non-classés :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 10

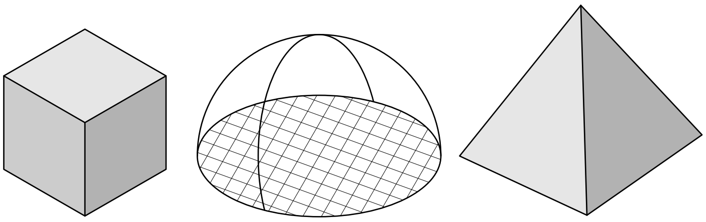
Echanges thermiques

En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure - y compris la base en contact avec le sol - de ce bâtiment, mesurée en m^2, à son volume, mesuré en m^3. Le facteur de compacité $c=\dfrac{S}{v}$, exprimé en m^{-1}, donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.

1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.
   a. Déterminer le facteur de compacité du cube de côté a.
   b. Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est

$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$ et que sa surface a pour aire $4\cdot\pi\cdot r^2$.

c. Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carré de côté a, et de hauteur verticale a.



d. En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment?

2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions sont x, y et z.

a. Vérifier que pour tous nombres a, b et c :

$$a^3+b^3+c^3-3\cdot a\cdot b\cdot c=\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

b. En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c :
$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3\cdot a\cdot b\cdot c$$

c. En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C dont le produit est égal à 1 : $A+B+C\geqslant 3$

d. Montrer que le facteur de compacité de ce pavé est :
$$c=2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Exercice 11

Dans ce problème, on ne considère que des nombres entiers naturels non nuls.
Pour chacun de ces entiers, on numérote les chiffres de son écriture décimale de gauche à droite. Le premier chiffre de gauche ne peut être 0.
Par eemple, pour le nombre 3021, le chiffre 3 reçoit le numéro 1, le chiffre 0 le numéro 2, le chiffre 2 le numéro 3 et le chiffre 1 le numéro 4.

On nomme "*grand pair*" tout nombre dont chaque chiffre en position paire, s'il y en a, est au moins auassi grand que ses chiffres directement voisins *(s'il en a)*.
On nomme "*grand impair*" tout nombre dont chaque chiffre en position impaire est au moins aussi grand que ses chiffres directement voisins *(s'il en a)*.

Par exemple :

- le nombre 3021 est un grand impair, mais pas un grand pair ;
- les nombres 3, 2, 7 et 777 sont à la fois des grands pairs et des grands impairs ;
- le nombre 2019 n'est ni un grand pair, ni un grand impair.

1. Le nombre 384 957 est-il un grand pair? Un grand impair?

2. Déterminer les nombres qui sont à la fois des grands pairs et des grands impairs.

3. Parmi les nombres s'écrivant avec deux chiffres, y a-t-il davantage de grands pairs ou de grands impairs?

4. a. Le nombre 3021 peut-il s'écrire comme la somme de deux grands impairs ayant le même nombre de chiffres?

   b. Le nombre 3021 peut-il s'écrire comme la somme de deux grand pairs ayant le même nombre de chiffres?

5. Prouver que tout nombre entier peut s'écrire comme la somme de deux grands impairs *(rien n'est ici imposé quant au nombre de chiffres de ces deux grands impairs)*.

6. Démontrer que tout nombre grand impair strictement inférieur à 100 peut s'écrire comme la somme de deux grands pairs *(sans contrainte quant au nombre de chiffres de ces grands pairs)*.

7. Déterminer le plus petit grand impair supérieur ou égal à 2 qui ne peut pas s'écrire comme la somme de deux grands pairs *(sans contrainte quant au nombre de chiffres de ces grands pairs)*.

8. Compléter le pseudocode ci-dessous *(ou s'en inspirer)* pour rédiger un algorithme *(à retranscrire sur sa copie)*, qui, partant d'un tableau "`T`" représentant un nombre "`N`" *(par exemple 384957)* de "`nb`" chiffres *(ici 6)*.

```
nb = 6
T=[3,8,4,9,5,7]

resultat = 1
i = 1
while (resultat == 1) and (i <= nb):
  ...
  i = i+2

print(r)
```