Dérivation globale

E.1 Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f(x)=x^5+3{\cdot}x^2-x+10$
2. $f(x)=2{\cdot}x^7-x^2-2{\cdot}x+1$

E.2 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{5}{3}{\cdot}x^3-\frac{2}{3}{\cdot}x^2+3{\cdot}x-4$$

Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

E.3 Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f\colon x\longmapsto -3{\cdot}x+2$
2. $g\colon x\longmapsto 4{\cdot}x^2-4$
3. $h\colon x\longmapsto 2{\cdot}x^2+3{\cdot}x$
4. $j\colon x\longmapsto 5{\cdot}x^3-2{\cdot}x^2$

E.4 Déterminer les nombres dérivés en 1 pour chacune des fonctions suivantes :

1. $h : x\longmapsto 2x^2+3$
2. $j : x\longmapsto 5x-3x^2-1$
3. $k\colon x\longmapsto -2{\cdot}x^2+2{\cdot}x$
4. $\ell\colon x\longmapsto 3x^2-2{\cdot}x$

E.5 Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f\colon x\longmapsto(3{\cdot}x+11)(4-x)$
2. $g\colon x\longmapsto(x+1)(2{\cdot}x-4)$

E.6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=-\frac{2}{3}{\cdot}x^3-3{\cdot}x^2+x+10$$

Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. Donner la valeur de $f'(-3)$.
2. a. Donner les coordonnées du point A de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse -3.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.
3. Vérifier à l'aide de la calculatrice que la droite obtenue est bien la tangente (T).

E.7 Chacune des fonctions ci-dessous est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de chacune de ces fonctions :

1. $f(x)=x^3-9{\cdot}x^2+15{\cdot}x-7$
2. $g(x)=-x^3-3{\cdot}x^2-3{\cdot}x+3$
3. $h(x)=-\frac{1}{3}{\cdot}x^3+\frac{1}{2}{\cdot}x^2-\frac{1}{2}{\cdot}x-1$

(on indiquera dans le tableau de variations les valeurs des extrémums locaux)

E.8 Déterminer, pour chaque fonction, l'expression de sa fonction dérivée :

1. $f : x\longmapsto(x^2-3{\cdot}x+1)(1-2{\cdot}x)$
2. $g : x\longmapsto(-x^3+2{\cdot}x+3){\cdot}(x^2+1)$

E.9 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction g définie ci-dessous :

$$g\colon x\longmapsto\big(x^2-3\big){\cdot}\sqrt{x}$$

On donnera l'expression de la fonction dérivée g' sous la forme d'un **quotient simplifié**.

E.10 Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1. $f\colon x\longmapsto(3-x){\cdot}\frac{1}{x}$
2. $g : x\longmapsto x{\cdot}\Big(x+\frac{1}{x}\Big)$

On donnera l'expression des fonctions dérivées sous la forme d'un **quotient simplifié**.

E.11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=\big(3-x\big){\cdot}\sqrt{x}$$

1. Établir que : $f'(9)=-4$
2. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
   En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 9.

E.12 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{3{\cdot}x+1}{2{\cdot}x-1}$$

Établir l'égalité suivante : $f'(x)=\dfrac{-5}{(2{\cdot}x-1)^2}$

E.13 On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{3}{2-x}$

Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

E.14 Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées à chacun des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{1}{x^5+1}$
2. $g(x)=\dfrac{5{\cdot}x-2}{3{\cdot}x+1}$

E.15 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{4}{x^2-2x+3}$$

Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x)=\dfrac{-8x+8}{(x^2-2x+3)^2}$

E.16 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{2{\cdot}x+1}$$

Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

E.17 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{2{\cdot}x^2-1}$$

Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{-2{\cdot}x^2-6{\cdot}x-1}{(2{\cdot}x^2-1)^2}$

E.18 On considère la fonction h dont l'image de x est défini par la relation : $h(x) = \dfrac{x^2-2{\cdot}x+1}{x^2-5{\cdot}x+6}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Montrer que le nombre dérivé de h en x s'exprime par :
$$h'(x) = \frac{-3{\cdot}x^2+10{\cdot}x-7}{(x^2-5{\cdot}x+6)^2}$$

E.19 On considère la fonction g définie par :

$$g(x)=\frac{5{\cdot}x-x^2}{3-x^2}$$

Établir l'égalité suivante : $g'(x)=\dfrac{5{\cdot}x^2-6{\cdot}x+15}{\left(3-x^2\right)^2}$

E.20 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2+4{\cdot}x-1}{2{\cdot}x-1}$$

Montrer que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{2{\cdot}x^2-2{\cdot}x-2}{(2{\cdot}x-1)^2}$

E.21 On considère la fonction f est définie par :

$$\frac{2{\cdot}x-1}{x^2+x}$$

Montrer que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = -\dfrac{2{\cdot}x^2-2{\cdot}x-1}{x^2{\cdot}(x+1)^2}$

E.22 Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-3x}{2x-4}$ b. $g : x \longmapsto \dfrac{-2{\cdot}x^2+x-3}{4{\cdot}x^2+3{\cdot}x}$

E.23 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = 5{\cdot}x - \frac{2{\cdot}x^2+x-2}{4{\cdot}x-3}$$

On note f' la dérivée de la fonction f. Déterminer les solutions de l'équation : $f'(x) = 0$

E.24 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{4{\cdot}x^2+x-3}{3{\cdot}x^2+2{\cdot}x-1}$$

Montrer que la fonction f', dérivée de la fonction f admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{5}{\left(3{\cdot}x-1\right)^2}$

E.25 On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

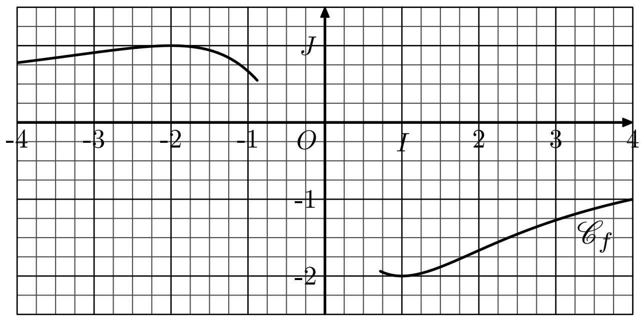
$$f(x) = \frac{-2{\cdot}x^2+x+1}{4{\cdot}x-1}$$

1. Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression : $f' : x \longmapsto -\dfrac{8{\cdot}x^2-4{\cdot}x+5}{(4{\cdot}x-1)^2}$
2. a. La fonction f admet-elle des tangentes dont le coefficient directeur soit -1 ?
   b. Si oui, déterminer leurs équations réduites.

E.26 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{-4{\cdot}x-2}{x^2+2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$. Ci-dessous est représentée une partie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

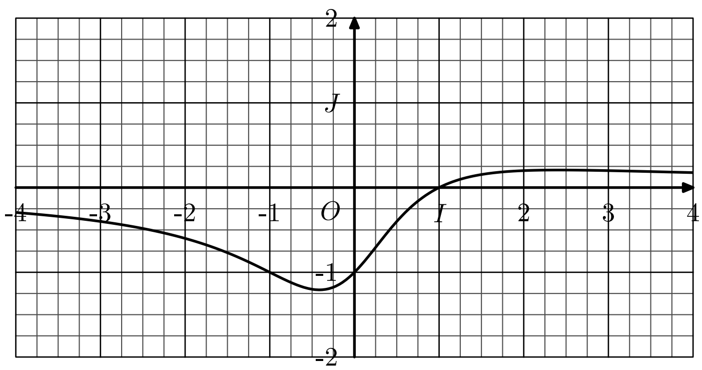


1. Donner les coordonnées du point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 0.
2. a. Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :
   $$f'(x) = \frac{4{\cdot}x^2+4{\cdot}x-8}{\left(x^2+2\right)^2}$$
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   c. Effectuer le tracé de la tangente (T) dans le repère ci-dessus. *(on indiquera les deux points utilisés pour le tracé de la tangente).*
3. Déterminer le ou les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où celle-ci admet une tangente horizontale.

E.27 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;I\,;J\right)$, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Montrer que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$.
2. a. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en 1.

(b) En déduire l'équation de la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(c) Effectuer le tracé de la droite (d).

(3) (a) Déterminer la valeur des réels a, b et c réalisant l'identité suivante :
$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c)$$

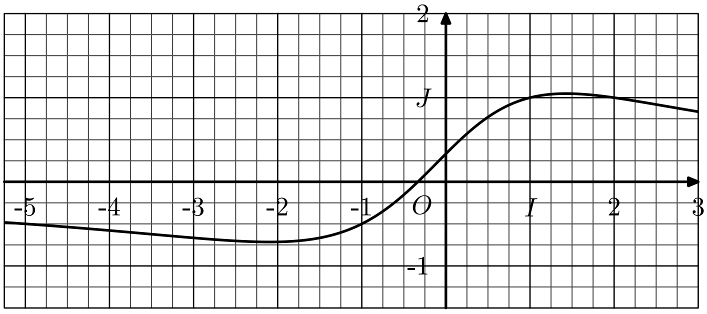
(b) Déterminer la forme factorisée du polynôme :
$$x^3 - x^2 - x + 1$$

(c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :
$$f(x) = \frac{1}{2}{\cdot}x - \frac{1}{2}$$

(4) Donner l'ensemble des coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente (d).

E.28 On considère la fonction f définie par la relation :
$$f(x) = \frac{3{\cdot}x+1}{x^2+3}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



(1) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

(2) (a) Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en 1.

(b) En déduire l'équation de la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(c) Effectuer le tracé de la droite (d).

(3) (a) Déterminer la valeur des réels a, b et c réalisant l'identité suivante :
$$x^3 + 3{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x + 5 = (x-1)(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c)$$

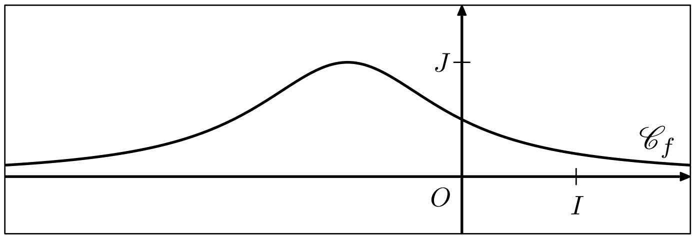
(b) En déduire la forme factorisée du polynôme :
$$x^3 + 3{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x + 5.$$

(c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :
$$f(x) = \frac{1}{4}{\cdot}x + \frac{3}{4}$$

(4) Donner l'ensemble des coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente (d).

E.29 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2{\cdot}x + 2}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $\big(O\,;\,I\,;\,J\big)$ orthonormé ci-dessous :



Soit (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

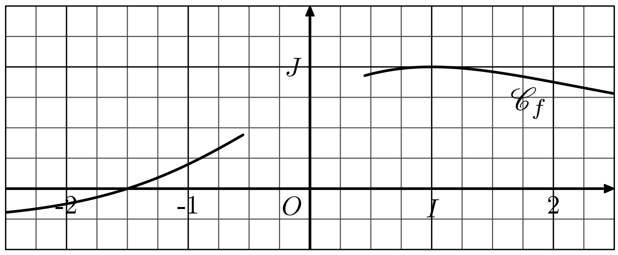
(1) (a) Établir que la fonction dérivée de la fonction f admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{-2{\cdot}x - 2}{\big(x^2 + 2{\cdot}x + 2\big)^2}$

(b) Établir que l'équation réduite de la droite (Δ) admet pour expression : $y = -\dfrac{1}{2}{\cdot}x + \dfrac{1}{2}$.

(2) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (Δ).

E.30 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{2{\cdot}x+3}{x^2+4}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$. Ci-dessous est représentée une partie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

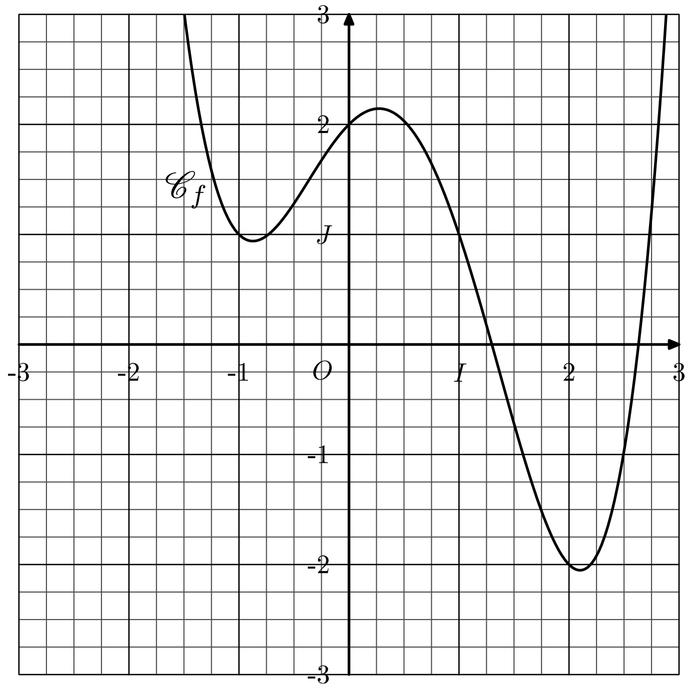


(1) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 et effectuer son tracé dans le repère ci-dessus. *(on indiquera les coordonnées des deux points utilisés pour le tracé de la tangente).*

(2) Déterminer le ou les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où celle-ci admet une tangente horizontale.

E.31 On considère la fonction f définie par la relation :
$$f(x) = \frac{1}{2}{\cdot}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}{\cdot}x^2 + x + 2$$

On munit le plan d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé dans lequel est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



(1) (a) Tracer la droite (d) d'équation $y = -x$.

(b) Quelle conjecture peut-on établir sur la droite (d) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

(2) Établir la conjecture précédente.

E.32 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-16}{4x^2+7}$$

(1) (a) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

(b) Le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous représente la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. Tracer la représentation graphique de (T).

(2) (a) Établir la factorisation suivante :
$8x^3+20x^2+14x+3 = (2x+1)^2{\cdot}(2x+3)$

(b) Étudier la position relative de la droite (T) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$.